História použitia matematického aparátu vo fyzike.
Niekoľko príkladov

Matematika má skoro vždy pripravený vhodný aparát pre fyziku, ale **nie vždy** a nie vždy o ňom fyzici **vedia.**

Úvod

E. Wigner , 1959, O nepochopiteľnej efektívnosti matematiky v prírodných vedách.

Zosilnenie naliehavosti otázky: **aparát práve včas**

5. st.pr.n.l. Pythagorejci, hudba, astronómia, prvý pokus (aspoň v Európe) o systemat. prístup.

Vplyv na Platóna: pokus o **matematizáciu** prírody**,** samozrejme zbytočný.(Jan Patočka: Aristoteles,....)

Nechajme to, postúpime oveľa ďalej.

Novovek

- Až na malé výnimky (Archimédes, Ptolemaios, niektorí astronomi) matematika vždy predbiehala fyziku, alebo skôr fyzika bola robená matematikmi (Pascal, Descartes, Huygens atd.), fyzici – uživatelia (Koperník vs. Rheticus)

- 17. stor. začiatok modernej fyziky: G. Galilei kontra Aristoteles - možnosť mechaniky a najmä

  I. Newton – diferenciálny a integrálny počet a **nová mechanika**

- 18. a prvá polovica 19. stor.

  Bernouliovci, L. Euler, J.-B. Fourier, J.-L. Lagrange, P.S. de Laplace, S.D. Poisson, F.Gauss , C.G. Jacobi , W.R. Hamilton , M.V Ostrogradskij, atď.

Koniec 19. a začiatok 20. stor.

- Časť fyzikov sa silne orientuje na matematiku:

  H. Helmholz, J.C. Maxwell, lord Kelvin, G. Stokes, O. Heaviside, J.W.Gibs, H.A. Lorentz, A. Somerfeld, L. Boltzmann a mnohí ďalší-prevážne **uživatelia kvalitnej** vtedajšej matematiky

- Matematici: H. Poincarè, P. Appel, E.T. Whittaker, Ljapunov, Meščerskij a i.

- Fyzika v potrebách takmer **dobieha** matematiku, ale celkové matematické povedomie u fyzikov je ešte skromné (dva príklady: Gamov vs. Kočin, matice & Heisenberg , Jordan, Born.)

- Je tu čas na prvý príklad.

Tenzorový počet a všeobecná teória relativity

R. 1905 A. Einstein a H. Poincarè , Špeciálna teória relativity, bežná špičková matematika tej doby (Lorentz)

R. 1913 práca A. Einsteina a M. Grossmanna Projekt všeobecnej teórie relativity a teórie gravitácie.

R. 1916 konečná práca A. Einsteina Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie

Einsteinove požiadavky na rovnice gravit. poľa:

Majú sa podobať na rovnice pre Newtonovo gravit. pole, ale potenciál musí byť vyjadrený tenzorom, ktorý popisuje geometriu priestoru:

Tenzorový počet a všeobecná teória relativity

ĽS = PS

sem vstupujú geometr. charakteristiky priestoru

Pre ľavú stranu bola potrebná vrcholová geometria toho času, ktorá bola práve dokončovaná

sem vstupujú fyzikálne charakteristiky, najmä rozloženie hmotností

viac-menej známa zo špeciálnej teórie relativity

Vznik tenzorového počtu a záver 1. príkladu

- R. 1854 základná prednáška B. Riemanna, publikovaná až v r. 1866, ale už predtým Gauss a iní (teória plôch)
- R. 1859 A. Cayley
- R. 1869 E. Beltrami, Elvin Christoffel, Lipschitz,
- Do r. 1901 talianskí geometri Luigi Bianchi, Gregorio Ricci-Curbastro, Tulio Levi-Civita tzv. Absolútny diferenciálny počet (Calcolo assoluto differenziale)

- Konečný výsledok: $R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = 8\pi T_{ab}$

- Geometri len-len, že to stihli (T. Levi-Civita ,1917)!

Kvantová mechanika, funkcionálna analýza a teória grúp

Kvantová mechanika r. 1925 mala dva zdroje:

- Vlnová mechanika, E. Schrödinger (a Herman Weyl)
- Maticová mechanika, W. Heisenberg, P. Jordan, M. Born (a David Hilbert)

- Neskôr ukázal Schrödinger ich ekvivalentnosť a teraz sa používa akási „splynutá“ verzia (asi najbližšie k P.A.M. Diracovi a funkcionálnej analýze, čo pochádza v kvant. mechanike od Weyla a J. von Neumanna)
- Veľmi stručne a čo najjednoduchšie, o čo v nej ide:

Kvantová mechanika, funkcionálna analýza a teória grúp

- Úlohou je riešiť tzv. Schr. rovnicu (nájsť všetky Ψ a E):

$$\hat{H}(x,y,z)\Psi_n(x,y,z) = E_n \Psi_n(x,y,z)$$

- Samotná úloha patrí do funkcionálnej analýzy, ktorá sa asi 10-15 rokov predtým začala budovať a niečo robili H. Weyl, D. Hilbert, von Neumann a i. s fyzikmi súčasne.
- Rovnica je vo väčšine prípadov zložitá – príležitosť pre teóriu grúp.

Kvantová mechanika a teória grúp

- Teória grúp je časť algebry, vznikla okolo roku 1832, keď ju E. Galois vypracoval a použil na dlho nevyriešené problémy s algebraickými rovnicami.
- Symetria ~ nejaká grupa
- Veľmi vhodná štruktúra prerástla celou matematikou a najmä geometriou (F.Klein, 1872, Erlangenský program), ale tiež sa objavila v mechanike (E.Nöther)
- Na prelome 19. a 20. stor. vznikla aplikácia teórie do priestorov funkcií, tzv. **teória reprezentácií grúp**
- Ferd. Frobenius, 1898, Isai Schur,1905, W. Burnside, opäť H. Weyl

Kvantová mechanika a teória reprezentácií grúp

Akad. Kořínek: Tým, ktorí majú sklon považovať za veľký vedecký objav len to, čo má bezprostredné aplikácie, by som rád pripomenul, že keď bola okolo roku 1900 budovaná teória reprezentácie grúp, nikto vtedy netušil, aký význam bude mať neskôr vo fyzike pre kvantovú teóriu

Ak sa vrátime k Schr. rovnici

- $\hat{H}(x,y,z)\,\Psi_n(x,y,z) = E_n\,\Psi_n(x,y,z)$,
- Namiesto jej ťažkého riešenia ponúka teória reprezentácií

1. nájsť symetriu operátora $\hat{H}$

Kvantová mechanika a teória grúp

2. Metódami teórie reprezentácií grúp získať celé riešenie

Detailne je to ťažké „ľudovo“ popísať,ale slovník jednotlivých pojmov z kvant. mechaniky a teórie reprezentácií veľa napovie:

Stav kvant. sústavy $\Psi_{n\,i}$ = i-tá bázová funkcia ireducibilnej reprezentácie grupy symetrie $\hat{H}$

Stavy príslušné tej istej energii E_n = podpriestor bázových funkcií n-tej ireducibilnej reprezentácie grupy symetrie $\hat{H}$

Kvantové čísla n = charakteristiky jednotlivých ireducibilných reprezentácií grupy symetrie $\hat{H}$

Kvantová mechanika a teória grúp

- Kto sa o to pričinil?
- E. Wigner, 1927, J. von Neumann & E. Wigner, 1928, atómové spektrá
- H.Weyl, 1928, kniha
- H. Bethe,1929, rozštiepenie atómových hladín v kryštáloch
- Kuriozita: E.Cartan už v r.1913 vypracoval (samozrejme pri hľadaní **párnorozmerných ireducibilných reprezentácií** grupy otáčaní v priestore) aparát pre popis **spinu**, ktorý fyzici pomerne dlho hľadali v rokoch 1925 – 1926.

Diracova δ-funkcia a teória distribúcií

- $\int f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 0$ ak $m \neq n$
- $\int f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 1$ ak $m = n$ skalárny súčin

  m, n prirodzené tzv. diskrétne spektrum

- Pre reálne λ, ξ tzv. spojité spektrum

  $\int f_\lambda(x)\, f_\xi(x)\, dx = 0$ ak $\lambda \neq \xi$

  Ak $\lambda = \xi$, je problém, integrál diverguje. Nedá sa normovať k jedničke

  → Normovať na δ-funkciu P.A.M. Dirac

$$\int f_\lambda(x)\, f_\xi(x)\, dx = \delta(\lambda - \xi)$$

Diracova δ-funkcia a teória distribúcií

- Vlastnosti: $\delta(\lambda) = 0$ pre $\lambda \neq 0$,

  $\delta(\lambda) = \delta(-\lambda)$

  $\int \delta(\lambda)\, d\lambda = 1$

- „Funguje“ len pod integrálom takto:

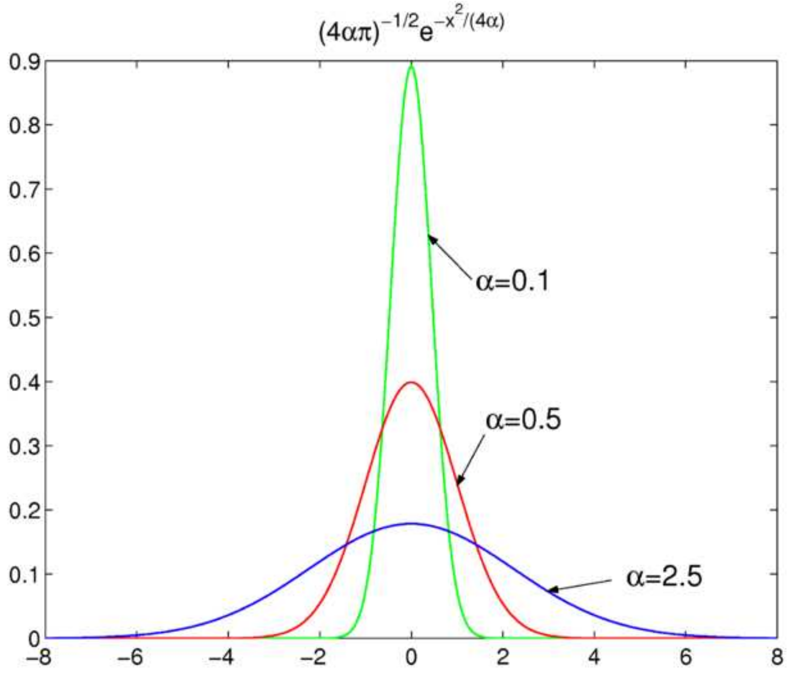
  $\int f(\lambda)\, \delta(\lambda)\, d\lambda = f(0)$

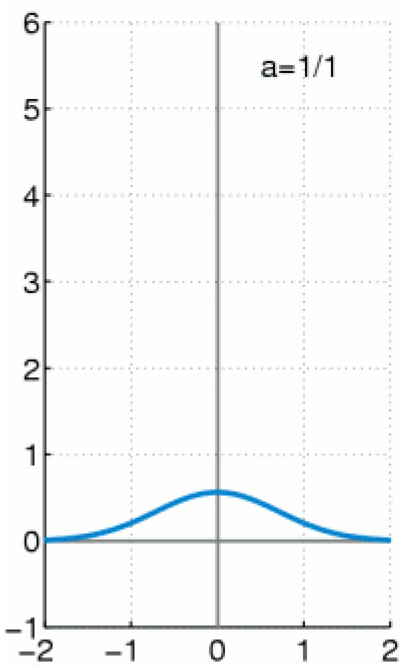
- **Taká funkcia nie je !**
- J. von Neumann: .....Nehladiac na to, Dirac pokrytecky dopustil existenciu funkcie takého druhu....
- Ale **funguje** to !

  1. J. von Neumann dostatočne rutinovaný, aby sa problému vyhol

Diracova δ-funkcia a teória distribúcií

2. L. S. Sobolev zrealizoval doslova Diracovu predstavu





Diracova δ-funkcia a teória distribúcií

3. L. Schwartz, 1945, si všimol, že „len pod integrálom“

→ **teória distribúcií**

- Prechod k funkcionálom, potom sa dajú zaradiť aj δ-distribúcie ako obyčajné funkcie
- Ako distribúcie sa dajú derivovať skokové funkcie a iné

- **V tomto prípade nebol aparát pre fyziku pripravený**

Naposledy P.O.M. Dirac

Príklad na neznalosť toho, čo už bolo u protistrany urobené:

- R. 1927 Diracova rovnica (zákl. rovnica relativistickej kvantovej mechaniky)

  Sám odvodil koeficienty – Diracove γ-matice

  Cliffordova algebra, W. Clifford, 1879
- Naopak: V 60-tych rokoch pri dôkaze tzv. vety o indexe

  M. Atiyah a I. Singer (Abelova cena 2004) sami odvodili Diracovu rovnicu a jej zovšeobecnenia.

Ďakujem Vám za pozornosť