NEVLASTNÉ ZAFARBENIA TOROIDÁLNYCH GRAFOV

Bc. Alexandra Kolačkovská

Školiteľ: RNDr. Mária Maceková, PhD.

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice

Vlastné vrcholové zafarbenie grafu G je také priradenie farieb vrcholom grafu G, že žiadne dva susedné vrcholy nie sú zafarbené rovnakou farbou. Ak uvažujeme také priradenie farieb vrcholom grafu, že susedné vrcholy nemusia mať nutne priradenú rôznu farbu, tak hovoríme o nevlastnom vrcholovom zafarbení grafu G. Najčastejšie skúmanými typmi nevlastných vrcholových zafarbení sú tie, v ktorých je ohraničený maximálny stupeň podgrafov indukovaných jednotlivými farbami. Maximálne stupne týchto indukovaných podgrafov sa nazývajú defekty.

Toroidálne grafy sú také, ktoré sa dajú nakresliť na tórus bez pretínania hrán. V práci sme sa zaoberali nevlastným vrcholovým zafarbením toroidálnych grafov. Zhrnuli sme v nej známe výsledky, ktorými boli také, kde sa defekty jednotlivých farebných tried rovnajú. Tie sme rozšírili o výsledky hovoriace o nevlastnom vrcholovom zafarbení, kde sú defekty jednotlivých farebných tried rôzne. Takisto sme uviedli výsledky pre niektoré podtriedy toroidálnych grafov, napr. pre toroidálne grafy s daným obvodom alebo toroidálne grafy neobsahujúce dvojicu susedných trojuholníkov.

3-ZAFARBITEĽNOSŤ GRAFOV DANÝCH ZAKÁZANÝMI INDUKOVANÝMI PODGRAFMI

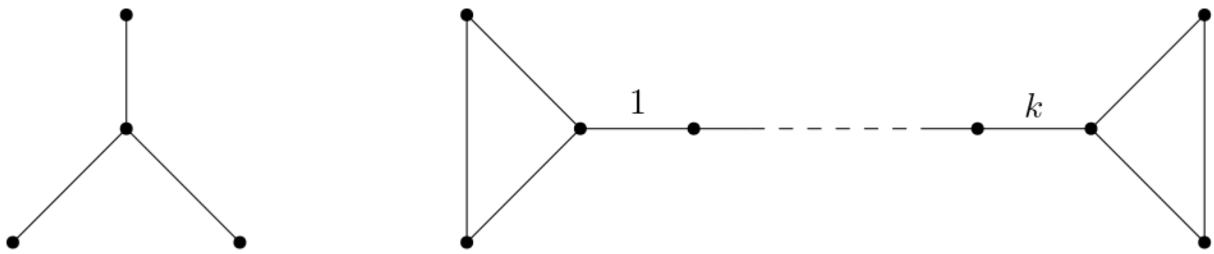
Bc. Diana Švecová

Školiteľ: RNDr. Mária Maceková, PhD.

Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice

Problém 3-zafarbiteľnosti grafu je jedným zo známych NP-úplných problémov. Jeho riešenie sa preto obmedzilo na skúmanie rôznych špeciálnych tried grafov. Ako vhodný prístup sa ukázalo skúmanie tried, v ktorých grafy neobsahujú konkrétne indukované podgrafy.
Bolo ukázané, že problém 3-zafarbiteľnosti grafov ostáva NP-úplný pre triedu grafov neobsahujúcich ako indukovaný podgraf $K_{1,3}$. Viacerí autori sa preto sústredili na triedy grafov neobsahujúcich $K_{1,3}$ a nejaký ďalší graf H ako indukovaný podgraf. Lozin a Purcell ukázali, že problém 3-zafarbiteľnosti grafov môže mať polynomiálnu zložitosť v danej triede, len ak H obsahuje najviac dva trojuholníky v každom z jeho komponentov.

Bola ukázaná polynomiálna riešiteľnosť tohto problému, ak $H = \Phi_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (Lozin a Purcell [1], Maceková a Maffray [2], Švecová [3]). V tejto práci ukážeme riešiteľnosť problému 3-zafarbiteľnosti v polynomiálnom čase pre triedu grafov neobsahujúcich $K_{1,3}$ a Φ_6 ako indukovaný podgraf.



Obr. 1. Graf $K_{1,3}$ (vľavo) a graf Φ_k (vpravo)

Literatúra:

1. V. Lozin, Ch. Purcell, Coloring vertices of claw-free graphs in three colors, Springer, 2012.
2. M. Maceková, F. Maffray, Polynomial cases of 3-coloring claw-free graphs, rukopis.
3. D. Švecová, Problém 3-zafarbiteľnosti pre vybrané triedy grafov, bakalárska práca, 2021.

MATEMATICKÝ KONCEPT V TEÓRII PÓROVITÝCH PROSTREDÍ

Bc. Miloslav Cisko

Školiteľ: doc. Mgr. Jozef Kiseľák, PhD.

Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 11 Košice

V tejto práci sa budeme venovať definícii pórovitosti množín. V teoretickej časti práce sa budeme venovať existujúcim prístupom ku pórovitosti. Priblížime si nematematické prístupy, ukážeme si ich vlastnosti a nedostatky. V tejto časti práce si rozoberieme základné teoretické poznatky potrebné na pochopenie práce, ako teória miery, Lebesgueova miera, kľukatosť kriviek a podobne. Takisto sa pozrieme na známy matematický prístup ku pórovitosti, povieme si prečo sa uvažuje táto vlastnosť množín a tiež si ukážeme prečo je nepostačujúci. Túto časť, pre lepšie pochopenie definovaných pojmov doplníme o vlastné ilustrácie. V hlavnej časti vyslovíme vlastnú definíciu pórovitosti množín, ktorá v sebe spojí matematický prístup s praktickým pohľadom a využitím. Vyslovíme a dokážeme dôležité vlastnosti pórovitosti a na praktických príkladoch si ukážeme vhodnosť použitia tejto definície. Výpočty podporíme vlastnými ilustráciami a grafmi vytvorenými v prostredí Maple.

Literatúra:

1. Cisko, M. Od krivosti ku kl'ukatosti, (2021).
2. Espinoza, M., Sunden, B., Andersson, M., and Yuan, J. Analysis of porosity and tortuosity in a 2d selected region of solid oxide fuel cell cathode using the lattice boltzmann method. ECS Transactions 65 (02 2015), 59–73.
3. Gommes, C., Bons, A.-J., Blacher, S., Dunsmuir, J., and Tsou, A. Practical methods for measuring the tortuosity of porous materials from binary or gray-tone tomographic reconstructions. AIChE Journal 55 (08 2009).
4. Matyka, M., and Koza, Z. How to calculate tortuosity easily? AIP Conference Proceedings 1453 (03 2012), 17–22.
5. Nelson, G. S. A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration, vol. 78. American Mathematical Soc., 2015.
6. Rynne, B. P., and Youngson, M. A. Linear Functional Analysis. Springer London, 2000.
7. Vallin, R. Newhouse thickness and porosity of cantor sets. Real Analysis Exchange 27 (01 2001), 349–358.
8. Zajíček, L. Porosity and σ-porosity. Real Analysis Exchange 13, 2 (1987), 314–350.
9. Zajíček, L. On σ-porous sets in abstract spaces. Abstract and Applied Analysis 2005 (06 2005).

SKORO DISJUNKNÉ MNOŽINY PRIRODZENÝCH ČÍSEL A TOPOLOGICKÉ PRIESTORY

Bc. Radka Schwartzová

Školiteľ: RNDr. Jaroslav Šupina, PhD.

Ústav matematických vied, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 041 54

Táto práca sa zaoberá aplikáciami skoro disjunktných systémov v topológii. Prvou z nich je konštrukcia Mrówkovho-Isbellovho priestoru $\psi(\mathcal{A})$, kde určujeme uzáver všetkých podmnožín tohto priestoru a overujeme jeho základné vlastnosti. Ďalej uvažujeme ideál I na množine prirodzených čísel a kardinálne invarianty kontinua $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}(I), \mathrm{cov}^*(I), \mathfrak{p}$, pričom poukazujeme na rôzne možnosti ich definovania. Naším hlavným výsledkom je dôkaz, že kardinálny invariant kontinua $\mathfrak{a}(I)$ je možné reprezentovať uniformným číslom $\mathrm{non}(\mathrm{P})$ topologickej vlastnosti P.

Literatúra:

1. A. Blass. *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*. V: Handbook of Set Theory. Springer Netherlands, (2010). s. 395–491. ISBN 978-1-4020-5764-9.
2. C. J. Ash, J. Knight. *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*. Elsevier Science, (2000).
3. J. Brendle, S. Shelah. *Ultrafilters on ω—their ideals and their cardinal characteristics*. Transactions of the American Mathematical Society, (1997). roč. 351. s. 2643–2674.
4. J. Šupina. *Pseudointersection numbers, ideal slaloms, topological spaces, and cardinal inequalities*. Archive for Mathematical Logic, (2022). č. 62. s. 87–112.
5. L. Bukovský. *The structure of the real line*. Birkhäuser, (2011). ISBN 9783-0348-005-1.
6. M. Hrušák. *Combinatorics of filters and ideals*. Contemporary Mathematics (2011). roč. 533. ISBN 9780821848128.
7. M. Sleziak. *Aplikácie teórie množín*. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, (2017). Dostupné tiež z: https://msleziak.com/vyuka/2017/apliktm/apliktm.pdf.
8. N. H. Bingham, A. J. Ostaszewski. *Set theory and the analyst*. European Journal of Mathematics. (2018). roč. 53. s. 5–51.
9. P. S. Alexandroff, P. Urysohn. *Memorie sub les Espaces Topologiques Compacts*, (1926). s. 1–96
10. R. Engelking. *General topology*. Berlin: Heldermann, (1989). ISBN 3-88538-006-4.
11. T. Bartoszynski. *Invariants of measure and category*. Archive for Mathematical Logic, (1999). s. 491–555.

PYTAGOREJSKÉ TROJICE AKO SÚRADNICE

Autor: Bc. Juraj Hirjak

Školiteľ: RNDr. Lucia Janičková, PhD.

Adresa: Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Pytagorejské trojice sú usporiadané trojice prirodzených čísel, ktoré vyhovujú Pytagorovej rovnici. V tejto práci budeme uvažovať pytagorejské trojice ako súradnice bodov v trojrozmernom euklidovskom priestore. Tie budeme určovať pomocou generujúcich matíc Berggrenovho a Priceovho stromu primitívnych pytagorejských trojíc. Tieto matice danej trojici priradia tri nové trojice, resp. tri nové body. V práci sa budeme venovať trojuholníkom určeným týmito trojicami bodov, a dokážeme napríklad tvrdenia týkajúce sa rovín, ktoré určujú, ich obsahov, a ukážeme, či môžu byť rovnoramenné, resp. rovnostranné.

Literatúra:

1. Hirjak, J., 2022. Pytagorejské trojice so spoločnou vlastnosťou: bakalárska práca. Košice: UPJŠ v Košiciach.
2. Janičková, L., Csókási, E., 2023. METRIC PROPERTIES IN BERGGREN TREE OF PRIMITIVE PYTHAGOREAN TRIPLES [online], [cit. 2023-12-04]. Dostupné na: https://arxiv.org/abs/2304.05230
3. Koshy, T., 2002. Elementary Number Theory with Applications. San Diego: Harcourt Academic press. ISBN 0-12-421171-2.
4. Ryde, K., 2020. Trees of Primitive Pythagorean Triples [online], [cit. 2022-20-11]. Dostupné na: https://download.tuxfamily.org/user42/triples/triples.pdf
5. Sierpinski, W., 1969. Elementary theory of numbers. Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe.
6. Tripathi, A., 2008. On Pythagorean triples containing a fixed integer. In: Fibonacci Quarterly. Vol. 46-47, pp. 331-340. ISSN 00150517.

FIRSTOVOV STROM PYTAGOREJSKÝCH TROJÍC

Autor: Veronika Ziburová

Školiteľ: RNDr. Lucia Janičková, Phd.

Adresa: : Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Jesenná 5, 040 01 Košice

Pod pojmom pytagorejská trojica rozumieme usporiadanú trojicu prirodzených čísel, ktoré zodpovedajú koreňom Pytagorovej rovnice. V tejto práci sa oboznámime s vybranými metódami generovania pytagorejských trojíc. Začneme metódami, ktoré negenerujú všetky primitívne pytagorejské trojice, a to sú niektoré staroveké metódy a čísla Fibonacciho postupnosti. Následne popíšeme metódy, ktoré generujú všetky primitívne pytagorejské trojice: Euklidova formula, Berggrenov strom, Priceov strom a Firstovove stromy. Zameriame sa na konštrukciu Firstovových stromov pomocou špeciálnej maticovej pologrupy. Taktiež budeme skúmať izomorfizmy medzi vetvami jednotlivých stromov. Pozrieme sa konkrétne na izomorfizmus medzi druhým Firstovovým stromom a Priceovym stromom a vzťah medzi maticou z Berggrenovho stromu a transformáciou definovanou Firstovom.

Literatúra:

1. Agarwal R.P., 2020. Pythagorean Triples Before and after Pythagoras. In: Computation. Vol.8, 62. ISSN 2079-3197.
2. Berggren B., 1934. Pytagoreiska Trianglar (Pythagorean Triangles). In: Tidskrift för Elementär Matematik, Fysik och Kemi. Vol. 17, pp. 129--139.
3. Boardman, M., 2000. Proof without Words: Pythagorean Runs. In: Mathematics Magazine. Vol.73, no.1, pp. 59 [online], [cit. 2023-04-03]. Dostupné na: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0025570X.2000.11996805.
4. Firstov V. E., 2008. A Special Matrix Transformation Semigroup of Primitive Pairs and the Genealogy of Pythagorean Triples. Pleiades Publishing, Ltd. In: Mathematical Notes. Vol. 84, no. 2, pp. 263–-279. ISSN 0001-4346.
5. Hall A., 1970. Genealogy of Pythagorean Triads. Classroom Notes 232. In: The Mathematical Gazette. Vol.54, no.390, pp. 377--379 [online], [cit. 2023-04-03]. Dostupné na: https://doi.org/10.2307/3613860.
6. Koshy T., 2007. Elementary Number Theory with Applications. 2nd ed. Academic Press. ISBN 978-0-12-372487-8.
7. Palmer L., Ahuja M., Tikoo M., 1998. Finding Pythagorean Triple Preserving Matrices. In: Missouri Journal of Mathematical Sciences. Vol. 10, no. 2, pp. 99--105. ISSN 0899-6180.
8. Price H. L., 2008. The Pythagorean Tree: A New Species [online], [cit. 2023-04-03]. Dostupné na: https://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf.
9. Ryde K., 2020. Trees of Primitive Pythagorean Triples [online], [cit. 2023-04-03]. Dostupné na: https://download.tuxfamily.org/user42/triples/triples.pdf.