

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

Prírodovedecká fakulta
Ústav matematických vied



Božena Mihalíková, Ján Ohriska

MATEMATICKÁ ANALÝZA 1

Vysokoškolský učebný text

Košice, 2012

© 2012 doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., doc. RNDr. Ján Ohriska, CSc.

Recenzenti: doc. RNDr. Ján Borsík, CSc.

prof. RNDr. Pavol Marušiak, DrSc.

prof. RNDr. Vincent Šoltés, CSc.

Rozsah strán: 220

Elektronický vysokoškolský učebný text pre Prírodovedeckú fakultu UPJŠ v Košiciach.
Za odbornú a jazykovú stránku tohto vysokoškolského učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Umiestnenie: <http://www.upjs.sk/pracoviska/univerzitna-kniznica/e-publikacia/#pf>

Dostupné od: 1.8.2012

ISBN 978-80-7097-963-1

Obsah

Predslov	v
1 Reálne čísla	8
1.1 Axiómy reálnych čísel	8
1.2 Dôsledky axióm sčítania	9
1.3 Dôsledky axióm násobenia	11
1.4 Veta o matematickej indukcii	13
1.5 Dôsledky axióm usporiadania $C_1 - C_4$	15
1.6 Mocnina s celočíselným exponentom	19
1.7 Absolútna hodnota	21
1.8 Interval, okolie bodu, nevlastné číslo $+\infty, -\infty$	25
1.9 Dôsledky axiómy o hornej hranici	26
1.10 Ďalšie vlastnosti reálnych čísel	32
1.11 Mocnina s reálnym exponentom	39
1.12 Logaritmus	51
2 Postupnosť čísel	57
2.1 Limita postupnosti	57
2.2 Ohraničenosť postupnosti	62
2.3 Operácie s konvergentnými postupnosťami	64
2.4 Nevlastná limita	69
2.5 Monotónne postupnosti	73
2.6 Vybrané postupnosti	77
2.7 Fundamentálne postupnosti	81
2.8 Hromadný bod postupnosti	83
3 Funkcia reálnej premennej	88
3.1 Pojem funkcie	88
3.2 Operácie s funkciami	92
3.3 Niektoré špeciálne triedy funkcií	94
3.3.1 Ohraničené a neohraničené funkcie	94
3.3.2 Párne a nepárne funkcie	96
3.3.3 Periodické funkcie	97

3.3.4	Monotónne funkcie	98
3.3.5	Prosté funkcie	100
3.4	Inverzná funkcia	102
3.5	Limita funkcie	105
3.6	Vety o limitách	112
3.7	Rôzne typy limít	119
3.8	Spojité funkcie	126
3.9	Spojitosť funkcie na množine	131
3.10	Elementárne funkcie	142
3.10.1	Konštantná funkcia	142
3.10.2	Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom	143
3.10.3	Polynóm	144
3.10.4	Racionálna funkcia	145
3.10.5	Mocninová funkcia	146
3.10.6	Exponenciálna funkcia	147
3.10.7	Logaritmická funkcia	150
3.10.8	Goniometrické funkcie	150
3.10.9	Cyklometrické funkcie	157
3.10.10	Hyperbolické a hyperbolometrické funkcie	159
3.11	Niektoré dôležité limity funkcií	161
4	Diferenciálny počet	164
4.1	Derivácia funkcie	165
4.2	Diferenciál funkcie	171
4.3	Základné pravidlá výpočtu derivácie	173
4.4	Derivácia a diferenciál vyššieho rádu	180
4.5	Základné vety diferenciálneho počtu	183
4.6	Použitie diferenciálneho počtu k vyšetrovaniu vlastností funkcií	189
4.6.1	Monotónnosť funkcie	189
4.6.2	Extrémy funkcie	191
4.6.3	Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body	195
4.6.4	Asymptoty	200
4.6.5	Priebeh funkcie	202
4.7	L'Hospitalove pravidlá	205

4.8	Taylorov polynóm	208
4.9	Funkcia daná parametricky	214
Použitá literatúra		220

Predslov

Tento učebný text je určený poslucháčom prvého ročníka študijného odboru 76–12–8 „Učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov“ v kombináciách s matematikou. Je vyhotovený na základe prednášok autorov a ich viac ako desaťročných skúseností z výučby tohoto predmetu na PF UPJŠ. Pri jeho písaní sa autori snažili zohľadniť špecifickosť učiteľského štúdia matematiky. Predkladaný učebný text nebol písaný pre nedostatok učebníc matematickej analýzy. Dôvodom pre jeho napísanie boli zistenia autorov, že poslucháči nemajú zo strednej školy dostatočné skúsenosti v práci s odbornou literatúrou, ťažkosti mnohým spôsobuje (najmä v prvých semestroch) čo i len trochu odlišný výklad, nie zriedka aj zmena v označovaní, čím im uniká podstata študovanej problematiky.

Autori textu si nekládli za cieľ byť originálni. Ich snahou bolo urobiť taký výber tém, aký je nutný pre budúceho učiteľa matematiky a zvoliť takú metódu výkladu, ktorá je podľa ich názoru vhodná pre poslucháčov prvého ročníka. Dobré zvládnutie učiva (rozšírenie matematického aparátu a s tým súvisiace možnosti uplatnenia iných dokazovacích metód ako aj získanie potrebných početných schopností) predpokladá použitie aj ďalších literárnych prameňov (učebníc, zbierok úloh) podľa odporúčania vyučujúceho.

Je potrebné si uvedomiť, že kurz matematickej analýzy patrí k základom vyššej matematiky a je dôležitým prostriedkom pre pestovanie všetkých zložiek „matematického myslenia“, medzi ktoré počítame schopnosť abstrahovať, dedukovať, presne a vecne sa vyjadrovať, logicky kombinovať, uvažovať v pojmoch, analyzovať. K tomu je dobre vedieť, že matematika, podobne ako každá iná vedná disciplína, si vytvorila svoj vyjadrovací prostriedok „matematickú reč“. Táto sa podstatne nelíši od bežnej hovorovej reči. Rozdielnosti, čo do povahy vyjadrovania, spočívajú iba v tom, že v matematike sa vyjadrujeme starostlivejšie a zodpovednejšie než v bežnom rozhovore. Svoje myšlienky, či tvrdenia, musíme formulovať jednoznačne, aby nedošlo k ich rozdielnym interpretáciám. Špecifickou črtou matematickej reči je vyjadrovanie „v pojmoch“, „v symboloch“, „vo výrokoch“. Je to však len formálna odlišnosť od hovorovej reči, ktorá umožňuje vyjadrovať sa stručne a zrozumiteľne s tým, že podstata povedaného zostáva zachovaná. Špecifickou črtou matematiky (a to aj v porovnaní s inými vednými odbormi) je abstraktnosť používaných pojmov, exaktnosť jej metód a široká škála platnosti výsledkov (tvrdení). V matematike bežný stupeň abstrakcie a exaktnosť pracovných postupov často spôsobujú začiatníkovi ťažkosti, študovaná problematika sa zdá príliš teoretická. Treba si však uvedomiť, že práve vďaka vysokému stupňu abstrakcie a exaktnosti plní matematika svoju veľmi

dôležitú a nezastupiteľnú úlohu v iných vedných disciplínach, a tým v spoločenskom pokroku vo všeobecnosti. Široká platnosť matematických výsledkov znamená možnosť ich použitia v rozličných oblastiach ľudskej činnosti a je podmienená práve abstraktnosťou pojmov a logickou bezospornosťou postupov získania týchto výsledkov. Je nutné, aby si budúci učiteľ matematiky zvykol na požadovaný stupeň abstrakcie i na stupeň presnosti, ktoré sú v matematike bežné, t.j. aby si osvojil „matematické myslenie“. Bez neho nie je možné úspešne študovať náročnejšie partie matematiky, ani úspešne vyučovať matematiku. Čitateľovi preto odporúčame, aby venoval náležitú pozornosť pojmom zavedeným v definíciách, (obsahovo) presnému zneniu viet a ich dôkazom. Ak pri takomto prístupe poslucháč vycíti úlohu definícii a základnú myšlienku dôkazu tej ktorej vety, zistí ako jednotlivé časti študovanej látky navzájom súvisia a ako málo je základných myšlienkových pochodov, ktoré sa v najrozličnejších kombináciách vyskytujú. Ako je dobre známe, nutným predpokladom úspešného štúdia (nielen matematiky) je systematickosť v práci. Prípadné počiatočné, ťažkosti pri štúdiu je možné obyčajne odstrániť húževnatosťou a trpezlivosťou.

Predkladaný učebný text je členený na kapitoly a kapitoly na články. Každá kapitola je okrem názvu označená svojim poradovým číslom. Každý článok je okrem názvu označený číslom kapitoly, v ktorej sa nachádza a svojim poradovým číslom v tejto kapitole (napr. článok 3.2 je druhý článok v tretej kapitole). Definície, vety, poznámky, ... sú označené tromi číslami, z nich opäť prvé znamená kapitolu, druhé článok v tejto kapitole a tretie poradové číslo v danom článku (napr. veta 2.4.5 sa nachádza v 2. kapitole, 4. článku ako piata v poradí definícií, viet, poznámok, ...). Vzorce a ďalšie vzťahy, na ktoré sa v texte odvolávame, sú číslované samostatne v každej kapitole.

Súbežne s kurzom matematickej analýzy je do výučby v 1. semestri zaradený predmet „Úvod do štúdia matematiky“, ktorý je obsahovo zameraný na rozšírenie a prehĺbenie poznatkov o výrokoch a množinách, na úlohu a postavenie axióm, definícií, viet a ich dôkazov, ako aj na symboliku či zaužívané spôsoby označenia v matematike. Preto o týchto pojmoch učebný text nepojednáva.

Želaním autorov je, aby predkladaný učebný text pomohol poslucháčom zvládnuť základy matematickej analýzy a aby prispel k ich adaptácii na vysokoškolské štúdium.

Aj pri najpozornejšom písaní a opakovanom čítaní obsiahlejšieho textu je ťažké vyhnúť sa všetkým chybám, najmä formálneho charakteru. Autori preto uvítajú každú pripomienku poukazujúcu na chyby a nedostatky tohoto učebného textu.

Ďakujeme pani doc. RNDr. Zuzane Bukovskej, CSc. a oponentom pánom doc. RNDr. Já-

novi Borsíkovi, CSc, Prof. RNDr. Pavlovi Marušiakovi, DrSc. a prof. RNDr. Vincentovi Šoltésovi, CSc. za starostlivé čítanie rukopisu a pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu tohto učebného textu.

Autori

1 Reálne čísla

1.1 Axiómy reálnych čísel

Pojem čísla je jedným zo základných pojmov matematiky. Stretávali sme sa a pracovali s ním od prvého ročníka základnej školy. Najskôr to boli čísla prirodzené, potom celé, neskôr racionálne a na strednej škole aj čísla iracionálne a komplexné. Dozvedeli sme sa, že čísla racionálne a iracionálne nazývame reálnymi a navyiac, že množinou všetkých reálnych čísel (označenie $\mathbb{R}$) rozumieme zjednotenie množiny všetkých racionálnych čísel (označenie $\mathbb{Q}$) a množiny všetkých iracionálnych čísel. Oboznámili sme sa s vlastnosťami operácií sčítania, odčítania, násobenia a delenia, i relácií rovnosti a nerovnosti. Pravda nie všetky tvrdenia boli dokázané. Často sa iba konštatovalo, že to a to sa dá dokázať.

Poznamenajme, že nie je cieľom tejto kapitoly systematické štúdium základných vlastností reálnych čísel, nakoľko toto je predmetom kurzu teoretickej aritmetiky. My uvedieme axiómy reálnych čísel a odvodíme niektoré ďalšie vlastnosti reálnych čísel, ktoré budeme potrebovať pri budovaní matematickej analýzy.

Definícia 1.1.1. Množinou reálnych čísel ($\mathbb{R}$) budeme nazývať množinu prvkov $x, y, z, \dots$, na ktorej sú definované operácie sčítania a násobenia a relácia usporiadania, pre ktoré sú splnené nasledujúce podmienky (platia nasledujúce axiómy):

A. **Sčítanie.** Každý dvojici prvkov $x, y \in \mathbb{R}$ je priradený prvok $t \in \mathbb{R}$, ktorý nazývame súčtom prvkov x a y a označujeme $x + y$, pričom platia axiómy:

A₁: $x + y = y + x$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

A₂: $(x + y) + z = x + (y + z)$ pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}$.

A₃: V $\mathbb{R}$ existuje prvok, ktorý označíme 0 (a nazývame **nulou**), taký že $x + 0 = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

A₄: Ku každému $x \in \mathbb{R}$ existuje prvok $y \in \mathbb{R}$ taký, že $x + y = 0$. Tento prvok nazývame **opačný** k x .

B. **Násobenie.** Každý dvojici prvkov $x, y \in \mathbb{R}$ je priradený prvok $v \in \mathbb{R}$, ktorý nazývame súčinom prvkov x a y a označujeme xy , pričom platia axiómy:

B₁: $xy = yx$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

B₂: $(xy)z = x(yz)$ pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}$.

B₃: V $\mathbb{R}$ existuje prvok rôznyi od 0, ktorý značíme 1 (a nazývame **jednotkou**), pre ktorý je $x \cdot 1 = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

B₄: Pre každé $x \in \mathbb{R}$, x rôzne od 0, existuje prvok $u \in \mathbb{R}$, nazývaný **prevrátenou hodnotou** k x , taký, že $xu = 1$.

B₅: $x(y + z) = xy + xz$ pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}$.

C. **Usporiadanie**. Pre každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$, alebo $y \leq x$, pričom platia axiómy:

C₁: $x \leq x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$; ak $x \leq y$ a $y \leq x$, tak $x = y$.

C₂: Ak $x, y, z \in \mathbb{R}$, pritom $x \leq y$ a $y \leq z$, tak $x \leq z$.

C₃: Ak $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $x \leq y$, tak $x + z \leq y + z$.

C₄: Ak $x, y \in \mathbb{R}$, pritom $0 \leq x$ a $0 \leq y$, tak $0 \leq xy$.

C₅: Ak $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ a existuje $z \in M$ také, že pre každé $x \in M$ je $x \leq z$, tak existuje práve jedno reálne číslo S týchto vlastností:

a) pre každé $x \in M$ je $x \leq S$,

b) ak pre $t \in \mathbb{R}$ platí $t < S$, tak existuje aspoň jedno $x_0 \in M$ také, že $t < x_0$ ($t < S$ znamená, že $t \leq S$ a $t \neq S$).

Urobme niekoľko poznámok k tejto definícii. Predovšetkým vidíme, že sme nedefinovali jednotlivé reálne čísla, ale všetky naraz ako množinu prvkov vyhovujúcich istej sústave axióm. Sú známe aj iné spôsoby budovania teórie reálnych čísel, kde to, čo my považujeme za axiómy, sú vety, ktoré je možné získať z axióm teórie čísel a teórie množín. Napr. v [5] je vyššie uvedená axióma C₅, nazývaná „Axióma o hornej hranici“, zaradená ako veta a dokázaná.

Prejdime k odvodeniu ďalších vlastností reálnych čísel, ktoré môžeme považovať za dôsledky axióm uvedených v definícii 1.1.1. V ďalšom budeme slovom „číslo“ rozumieť reálne číslo. V prípadoch, keď bude potrebné reálne číslo presnejšie charakterizovať, napr. keď pôjde o číslo celé, alebo racionálne, ... vždy to výslovne uvedieme.

1.2 Dôsledky axióm sčítania

Veta 1.2.1. V množine $\mathbb{R}$ existuje len jedna nula.

Dôkaz. Nech existujú dve nuly 0_1 a 0_2 , $0_1 \neq 0_2$. Potom pomocou axióm A₃ a A₁ máme

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2, \text{ t.j. } 0_1 = 0_2$$

čo je spor, lebo sme predpokladali, že $0_1 \neq 0_2$. $\square$

Veta 1.2.2. *Ku každému $x \in \mathbb{R}$ existuje v $\mathbb{R}$ len jeden opačný prvok.*

Dôkaz. Nech $x \in \mathbb{R}$ je taký prvok, že k nemu existujú dva rôzne opačné prvky $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Potom postupným použitím axióm $A_3, A_1, A_4, A_2, A_1, A_2, A_4, A_1, A_3$ v tomto poradí máme

$$\begin{aligned} y_2 &= y_2 + 0 = 0 + y_2 = (x + y_1) + y_2 = x + (y_1 + y_2) = \\ &= x + (y_2 + y_1) = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1 + 0 = y_1. \end{aligned}$$

Dostali sme, že $y_2 = y_1$, čo je spor s predpokladom. $\square$

Pre prvok opačný k prvku x budeme používať označenie $-x$. Teda $x + (-x) = 0$, ale podľa axiómy A_1 aj $(-x) + x = 0$, t.j. prvok x je opačný k prvku $-x$, a podľa práve zavedeného označenia platí $-(-x) = x$.

Súčet $x + (-y)$ budeme písať v tvare $x - y$ a budeme ho nazývať **rozdiel** prvkov x a y . Tým sme sa dopracovali k operácii **odčítania**, definovanej na množine $\mathbb{R}$.

Prv než uvedieme ďalšiu vlastnosť opačného prvku uvedomme si, že pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{R}$ má súčet $x + y + z$ jednoznačný zmysel, čo ľahko vyplýva z axióm A_2 a A_1 .

Veta 1.2.3. *Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Prvok opačný k súčtu $x + y$ sa rovná súčtu opačných prvkov $k x$ a $k y$ (t.j. $-(x + y) = -x - y$).*

Dôkaz. Vieme, že prvok opačný ku $x + y$ je $-(x + y)$. Ďalej, vzhľadom na vyššie zavedené označenie a na axiómu A_1 máme

$$(x + y) - x - y = x + y - x - y = x - x + y - y = 0 + 0 = 0,$$

čo podľa axiómy A_4 znamená, že $-x - y$ je prvok opačný ku $x + y$, a podľa vety 1.2.2 vieme, že $-x - y = -(x + y)$. $\square$

Veta 1.2.4. *Pri daných $a, b \in \mathbb{R}$ existuje práve jedno $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí*

$$a + x = b. \tag{1.1}$$

Toto x rovná sa $b - a$ (a nazývame ho riešením rovnice (1.1)).

Dôkaz. Najprv dokážeme jednoznačnosť riešenia rovnice (1.1). Nech $x \in \mathbb{R}$ je riešením rovnice (1.1). Potom

$$x = x + 0 = 0 + x = a - a + x = a + x - a = b - a.$$

(Čitateľ nech si sám zdôvodní každú z uvedených rovností.)

Vidíme, že ak nejaké $x \in \mathbb{R}$ je riešením rovnice (1.1), tak sa rovná číslu $b - a$ a nemôže sa rovnať žiadnemu inému číslu.

Ukážeme ešte, že číslo $x = b - a$ je riešením rovnice (1.1). Nakoľko

$$a + (b - a) = a + b - a = a - a + b = 0 + b = b + 0 = b,$$

tak číslo $b - a$ vyhovuje rovnici (1.1), je teda jej riešením. $\square$

1.3 Dôsledky axióm násobenia

Veta 1.3.1. *V množine $\mathbb{R}$ existuje len jedna jednotka.*

Dôkaz. Nech existujú dve rôzne jednotky 1_1 a 1_2 . Potom pomocou axióm B_3 a B_1 zistujeme, že

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2,$$

čo je spor s predpokladom, že $1_1 \neq 1_2$. $\square$

Veta 1.3.2. *ku každému $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existuje v $\mathbb{R}$ len jedna prevrátená hodnota.*

Dôkaz. Nech $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ je číslo, ku ktorému existujú dve rôzne prevrátené hodnoty $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, t.j. $z_1 \neq z_2$ a pritom $yz_1 = 1$, a tiež $yz_2 = 1$. Postupným použitím axióm B_3 , B_4 , B_1 , B_2 , B_1 , B_2 , B_1 , B_4 , B_3 máme

$$\begin{aligned} z_2 &= z_2 \cdot 1 = z_2(yz_1) = z_2(z_1y) = (z_2z_1)y = (z_1z_2)y = z_1(z_2y) = \\ &= z_1(yz_2) = z_1 \cdot 1 = z_1, \end{aligned}$$

čo je spor. $\square$

Prvok, ktorý je prevrátenou hodnotou prvku x budeme označovať $1/x$. Súčin $x \cdot (1/y)$ zapíšeme v tvare x/y a nazývame ho **podielom** x a y . Tým sme sa dopracovali k operácii **delenie**, definovanej na $\mathbb{R}$ (okrem delenia nulou!). Pred uvedením ďalšej vlastnosti

prevrátenej hodnoty si všimnime (pomocou axióm B_1, B_2), že pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{R}$ má súčin xyz jednoznačný zmysel.

Veta 1.3.3. *Nech $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Prevrátená hodnota ku súčinu xy sa rovná súčinu prevrátených hodnôt $k x$ a $k y$ (t.j. $1/xy = 1/x \cdot 1/y$).*

Dôkaz. Vzhľadom na zavedené označenie vieme, že prevrátenou hodnotou k súčinu xy je číslo $1/xy$. Pomocou axióm B_1 a B_4 zistíme, že

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot x \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x \cdot \frac{1}{y} \cdot y = 1 \cdot 1 = 1.$$

Vidíme, že súčin $1/x \cdot 1/y$ je prevrátenou hodnotou ku xy a vzhľadom na vetu 1.3.2 je

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}. \quad \square$$

Veta 1.3.4. *Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje práve jedno $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí*

$$ax = b. \quad (1.2)$$

Toto x rovná sa b/a (a nazývame ho riešením rovnice (1.2)).

Dôkaz. Najprv ukážeme, že ak nejaké riešenie rovnice (1.2) existuje, musí byť rovné b/a . Vynásobením rovnice (1.2) číslom $1/a$ máme

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} b = \frac{1}{a} ax = 1 \cdot x = x.$$

Teda skutočne, ak x je riešením rovnice (1.2), tak $x = b/a$.

Ukážme ešte, že číslo $x = b/a$ je riešením rovnice (1.2). Dosadením čísla b/a za x do ľavej strany rovnice (1.2) máme

$$a \frac{b}{a} = a \frac{1}{a} b = 1 \cdot b = b,$$

čo znamená, že číslo b/a rovnici (1.2) vyhovuje, je teda jej riešením. $\square$

Veta 1.3.5. *Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ je $0 \cdot x = 0$.*

Dôkaz. Podľa axióm B_3, A_3, B_5

$$x = x \cdot 1 = x(1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0,$$

odkiaľ podľa vety 1.2.4 dostaneme

$$x \cdot 0 = x - x = 0. \quad \square$$

Veta 1.3.6. *Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $xy = 0$ a $x \neq 0$, tak $y = 0$.*

Dôkaz. Čitateľ nech si sám zdôvodní, že

$$y = \frac{1}{x} xy = \frac{1}{x} (xy) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Veta 1.3.7. Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ je $-x = (-1)x$.

Dôkaz. Skutočne, lebo

$$(-1)x + x = [(-1) + 1]x = x \cdot 0 = 0 \quad \text{odkiaľ máme} \quad (-1)x = -x,$$

čo bolo treba dokázať. $\square$

Úloha 1.3.8. Dokážte, že $(-1)(-1) = 1$.

Úloha 1.3.9. Dokážte, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}$ je $(-x)(-y) = xy$.

Úloha 1.3.10. Dokážte, že pre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, v prípade c) aj $c \neq 0$ platí:

$$\text{a) } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \text{b) } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \text{c) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

1.4 Veta o matematickej indukcii

Operácia sčítania a jej vlastnosti dovoľujú definovať pojem množiny všetkých prirodzených čísel.

Definícia 1.4.1. Množinou všetkých prirodzených čísel (označenie $\mathbb{N}$) budeme nazývať najmenšiu množinu reálnych čísel, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n + 1$.

Poznamenajme, že uvedenie definície 1.4.1 si vyžaduje overiť jej korektnosť, t.j. mali by sme ukázať, že taká množina $\mathbb{N}$ existuje. K tomu by sme však potrebovali viac znalostí z teórie množín.

Vidíme, že do množiny $\mathbb{N}$ patria čísla $1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots$, ktoré nazývame **prirodzené čísla**.

Vychádzajúc z definície 1.4.1 dokážeme teraz dôležitú vetu, nazývanú „Veta o matematickej indukcii“, ktorú často používame ako dokazovací prostriedok, ale ona nám poslúži aj pri definovaní nových pojmov.

Veta 1.4.2. Nech sa nejaký výrok V týka prirodzených čísel. Nech o výroku V je známe:

a) Platí pre číslo 1.

b) Ak platí pre prirodzené číslo n , tak platí aj pre číslo $n + 1$.

Potom výrok V platí pre každé prirodzené číslo.

Dôkaz. Nech A je množina tých prirodzených čísel, pre ktoré platí výrok V . Potom $A \subset \mathbb{N}$. na druhej strane, z predpokladov vety vieme, že $1 \in A$, a ďalej, ak pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ je $n \in A$, tak $n + 1 \in A$. keďže je $A \subset \mathbb{N}$, a tiež $\mathbb{N} \subset A$, tak $A = \mathbb{N}$, t.j. výrok V platí pre každé prirodzené číslo. $\square$

Ilustrujeme použitie práve dokázanej vety v úlohe dokazovacieho prostriedku na konkrétnom príklade.

Príklad 1.4.3. Dokážme, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2). \quad (1.3)$$

Riešenie:. Dôkaz vykonáme metódou matematickej indukcie, t.j. použitím vety 1.4.2. Je zrejmé, že náš výrok „ak $n \in \mathbb{N}$, tak platí (1.3)“ sa týka prirodzených čísel. Potrebujeme ešte overiť splnenie predpokladov a), b) vety 1.4.2. Vidíme, že pre $n = 1$ má (1.3) tvar $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, resp. $2 = 2$, čo je pravda, t.j. dokazovaný výrok platí pre číslo 1 (je splnený predpoklad a) vety 1.4.2). Predpokladajme teraz, že náš výrok platí pre prirodzené číslo $n = k$, t.j. že

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k + 1) = \frac{1}{3} k(k + 1)(k + 2). \quad (1.4)$$

(Tento predpoklad nazývame indukčný predpoklad.)

Potrebujeme ukázať, že pri splnení tohoto predpokladu bude dokazovaný výrok platiť aj pre číslo $n = k + 1$. Všímajme si preto súčet

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2),$$

čo je ľavá strana (1.3) pre $n = k + 1$. Pre prvých k sčítancov tohoto súčtu použijeme indukčný predpoklad (1.4). Preto môžeme písať

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) = \frac{1}{3} k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2).$$

Avšak

$$\frac{1}{3} k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2) = \frac{1}{3} (k + 1)(k + 2)(k + 3).$$

(Ktoré axiómy sme tu použili?)

Vidíme, že pri splnení indukčného predpokladu dokazovaný výrok platí pre $n = k + 1$

(je splnený predpoklad b) vety 1.4.2). Keďže predpoklady vety 1.4.2 sú splnené, platí jej tvrdenie. To v tomto konkrétnom prípade znamená, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí (1.3), čo sme mali dokázať. $\square$

Pre zavedenie nového pojmu môžeme využiť vetu 1.4.2 vtedy, keď máme definovať istý pojem $P(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. V zmysle vety 1.4.2 stačí definovať $P(1)$ a zadať algoritmus, na základe ktorého z pojmu $P(k)$ definujeme pojem $P(k+1)$ pre $k \in \mathbb{N}$. Tým je pojem $P(n)$ definovaný pre každé $n \in \mathbb{N}$. Týmto spôsobom vyslovenú definíciu nazývame **rekurentná definícia**, resp. hovoríme, že sme pojem $P(n)$ definovali rekurentne.

Príkladom rekurentnej definície je nasledujúca definícia pojmu $n!$:

1. $1! = 1$,
2. $n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1)$.

Pripomeňme teraz definície niektorých číselných množín, známych zo strednej školy.

Definícia 1.4.4. Množinou všetkých celých čísel (označenie $\mathbb{Z}$) budeme nazývať zjednotenie množiny $\mathbb{N}$, množiny všetkých čísel opačných k prvkom množiny $\mathbb{N}$ a jednoprvkovej množiny obsahujúcej číslo nula. Prvky množiny $\mathbb{Z}$ nazývame **celé čísla**. Množinou všetkých racionálnych čísel (označenie $\mathbb{Q}$) budeme nazývať množinu všetkých podielov x/y , kde $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. Prvky množiny $\mathbb{Q}$ nazývame **racionálne čísla**. Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne nazývame **iracionálne**.

Cvičenie

1. Dokážte, že číslo opačné k súčtu ľubovoľného konečného počtu čísel sa rovná súčtu opačných čísel k jednotlivým sčítancom.
2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:
 - a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,
 - b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$,
 - c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
 - d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

1.5 Dôsledky axióm usporiadania $C_1 - C_4$

Pomocou axióm C_1, C_2, C_3 ľahko zistíme, že platia nasledujúce tvrdenia.

Veta 1.5.1. *Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

- a) *Ak $x \leq y$, $y \leq z$ a $x = z$, tak $x = y = z$.*
- b) *Ak $x < y$, $y \leq z$, tak $x < z$ (resp. ak $x \leq y$, $y < z$, tak $x < z$).*
- c) *Vzťahy $x \leq y$, $0 \leq y - x$, $-y \leq -x$, $x - y \leq 0$ sú ekvivalentné.*
- d) *Ak $x < y$, tak $x + z < y + z$.*
- e) *Vzťahy $x < y$, $0 < y - x$, $-y < -x$, $x - y < 0$ sú ekvivalentné.*

Dôkaz. Tvrdenie a) získame ihneď použitím axiómy C_1 .

Pre dôkaz tvrdenia b) máme $x < y \Rightarrow x \leq y$. Keďže navyše $y \leq z$, tak podľa axiómy C_2 máme $x \leq z$. Avšak $((x = z) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow y \leq x$. Na druhej strane $((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y$, čo je spor s predpokladom, t.j. $x < z$.

Pre dôkaz ekvivalencie vzťahov v tvrdení c) si všimnime, že pripočítaním $-x$ k obidvom stranám prvého vzťahu získame pomocou axiómy C_3 druhý vzťah. Ak k jeho obidvom stranám pripočítame $-y$ dostaneme tretí vzťah, pripočítaním x k obidvom stranám máme štvrtý vzťah a konečne pripočítaním y k obidvom stranám štvrtého vzťahu získame opäť prvý vzťah, čím je ekvivalencia uvedených vzťahov dokázaná (premýšľaj!).

Pri dôkaze časti d) postupujeme podobne ako pri dôkaze časti b). Vieme, že platí výrok $x < y \Rightarrow x \leq y$. Potom podľa axiómy C_3 $x + z \leq y + z$. Ak pripustíme, že $x + z = y + z$, tak pripočítaním $-z$ k obidvom stranám tejto rovnosti dostaneme $x = y$, čo je spor s predpokladom. Preto $x + z < y + z$. Tvrdenie e) dokážeme podobne ako sme dokázali tvrdenie c) ibaže namiesto axiómy C_3 použijeme dokázané tvrdenie d) tejto vety. $\square$

Veta 1.5.2. *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Ak $x_i \leq y_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$, tak*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

pričom ak navyše $x_j < y_j$ aspoň pre jednu hodnotu $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tak

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Dôkaz. Opakovaným použitím axiómy C_3 máme

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + y_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \dots \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Ak pre niektorú hodnotu $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $x_j < y_j$, tak práve vykonanú úvahu možno zopakovať s tým, že v j -tom kroku použijeme tvrdenie d) vety 1.5.1 namiesto axiómy C_3 , čím dostaneme ostrú nerovnosť aj vo výsledku. $\square$

V ďalšom, ako je zaužívané, budeme číslo $x \in \mathbb{R}$ nazývať **nezáporným (kladným)**, ak $x \geq 0$ ($x > 0$) a budeme ho nazývať **nekladným (záporným)**, ak $x \leq 0$ ($x < 0$).

Vidíme, že číslo nula je nezáporné aj nekladné.

Veta 1.5.3. *Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}$ platí práve jeden zo vzťahov*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y \quad (\text{trichotómia}). \quad (1.5)$$

Dôkaz. Podľa definície relácie usporiadania, pre čísla x, y platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$, $y \leq x$. Ak platia obidva, tak podľa axiómy C_1 je $x = y$ a neplatí žiaden ďalší zo vzťahov (1.5). Keby sme totiž pripustili, že okrem vzťahu $x = y$ platí, napr. aj vzťah $x < y$, tak podľa vety 1.5.1 by platilo $0 < y - x$, čo je spor, lebo $y - x = 0$ (lebo $x = y$, t.j. číslo opačné k x je opačným aj k y).

Ak platí $x \leq y$, ale $x \neq y$, tak podľa axiómy C_1 neplatí $y \leq x$. Teda $x < y$ a žiaden ďalší zo vzťahov (1.5) neplatí. Podobne, ak platí $x \geq y$, ale $x \neq y$, tak opäť podľa axiómy C_1 neplatí $x \leq y$. Preto $y < x$, resp. $x > y$ a žiaden ďalší zo vzťahov (1.5) neplatí. $\square$

Veta 1.5.4. *Nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Potom $-x < 0$.*

Dôkaz. keďže $x > 0$, tak $-x \neq 0$, lebo prípad $-x = 0$ dáva

$$x = x + 0 = x + (-x) = 0,$$

čo je spor. Ak by bolo $-x > 0$, tak pre $x > 0$ máme

$$0 = x + (-x) > 0 + (-x) = -x > 0,$$

teda $0 > 0$, čo je opäť spor. Teda $-x < 0$. $\square$

Veta 1.5.5. *Nech $x, y \in \mathbb{R}$.*

- a) *Ak $x > 0$, $y > 0$, tak $xy > 0$.*
- b) *Ak $x < 0$, $y < 0$, tak $xy > 0$.*
- c) *Ak $x > 0$, $y < 0$, tak $xy < 0$.*

Dôkaz. a) Vieme, že $x > 0 \Rightarrow x \geq 0$ a $y > 0 \Rightarrow y \geq 0$. To podľa axiómy C_4 znamená, že $xy \geq 0$. keby bolo $xy = 0$, tak podľa vety 1.3.6 buď $x = 0$, alebo $y = 0$, čo však nie je, preto $xy > 0$.

b) Podľa vety 1.5.4 $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ a $y < 0 \Rightarrow -y > 0$. Potom podľa úlohy 1.3.9 a práve dokázaného tvrdenia a) máme

$$xy = (-x)(-y) > 0.$$

c) Tu opäť $y < 0 \Rightarrow -y > 0$. Teda

$$-xy = (-1)xy = (-1)yx = (-y)x > 0.$$

Vidíme, že číslo opačné k xy je kladné, preto samotné číslo xy je záporné. $\square$

Treba si všimnúť, že ak aspoň v jednom predpoklade vety 1.5.5 bude namiesto ostrej nerovnosti nerovnosť neostrá, potom aj v príslušnom tvrdení bude neostrá nerovnosť.

Veta 1.5.6. *Nech $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

a) *Ak $x \leq y$ a $z > 0$, tak $xz \leq yz$.*

b) *Ak $x \leq y$ a $z < 0$, tak $xz \geq yz$.*

Dôkaz. a) Vieme, že $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$ a $z > 0 \Rightarrow z \geq 0$. Preto pomocou axióm B_5 a C_4 máme

$$yz - xz = (y - x)z \geq 0, \quad \text{t.j.} \quad xz \leq yz.$$

b) Keďže teraz $y - x \geq 0$, $z < 0 \Rightarrow -z > 0$ a $-z > 0 \Rightarrow -z \geq 0$, tak

$$0 \leq (y - x)(-z) = -yz + xz, \quad \text{t.j.} \quad xz \geq yz. \quad \square$$

Lahko sa overí, že vo vete 1.5.6 možno neostré nerovnosti všade nahradiť ostrými.

Veta 1.5.7. $0 < 1$.

Dôkaz. Podľa axiómy B_3 vieme, že $1 \neq 0$. Potom, vzhľadom na časti a), b) vety 1.5.5 a na axiómu B_3 platí

$$1 = 1 \cdot 1 > 0. \quad \square$$

Veta 1.5.8. *Ak $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tak $1/x > 0$.*

Dôkaz. Vieme, že

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 > 0.$$

Nech $1/x = 0$. Potom podľa vety 1.3.5 je $x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot 0 = 0$, čo je spor. Podobne, ak $1/x < 0$, tak podľa vety 1.5.5 je $x \cdot \frac{1}{x} < 0$, čo je opäť spor. Teda $1/x > 0$. $\square$

Veta 1.5.9. *Nech $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$. Potom $0 < 1/y < 1/x$.*

Dôkaz. Vidíme, že $x > 0$, $y > 0$. Preto $xy > 0$, a tiež $1/xy > 0$. Odtiaľ a z vety 1.5.6 (verzia s ostrými nerovnosťami) máme

$$0 \cdot \frac{1}{xy} < x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy}, \text{ resp. } 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}. \quad \square$$

Cvičenie

1. Dokážte, že $2 > 1$ a $3 > 2$.
2. Dokážte, že $5 > 0$.
3. Dokážte nasledujúce tvrdenie: Ak $x, y, z, u \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq y$, $0 \leq z \leq u$, tak $xz \leq yu$.
4. Podľa vzoru definície 1.4.1 vyslovte definíciu množiny obsahujúcej číslo -7 a každé celé číslo väčšie ako -7 .
5. Podľa vzoru vety 1.4.2 vyslovte a dokážte postačujúcu podmienku k tomu, aby nejaký výrok V platil pre každé celé číslo väčšie alebo rovné -7 .
6. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) > (n + 1)(n - 1)$.

1.6 Mocnina s celočíselným exponentom

Operácia násobenia a jej vlastnosti a veta o matematickej indukcii dovoľujú definovať pojem mocniny s prirodzeným exponentom a pomocou neho aj pojem mocniny s celočíselným exponentom.

Definícia 1.6.1. Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Číslo x^n dané predpisom

- a) $x^1 = x$,
- b) $x^n = x^{n-1} \cdot x$ pre $n > 1$

nazývame **n-tou mocninou čísla x** .

Poznamenajme, že číslo x v mocnine x^n nazývame základ a číslo n exponent, alebo mocniteľ. Toto pomenovanie zachováme aj vtedy, keď n nie je prirodzené číslo.

Vyššie definovaný pojem mocniny s prirodzeným exponentom teraz rozšírime na pojem mocniny s celočíselným exponentom.

Definícia 1.6.2. Pre $x \in \mathbb{R}$ kladieme

$$x^0 = 1$$

a pre $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ kladieme

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Vidíme, že definíciami 1.6.1 a 1.6.2 je x^n definované pre každé celé číslo n .

Všimnime si teraz nasledujúce vlastnosti mocniny s celočíselným exponentom.

Veta 1.6.3. *Nech $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Potom pre ľubovoľné celé čísla n a m je*

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}. \quad (1.6)$$

Dôkaz. Pre $n, m \in \mathbb{N}$ dokážeme platnosť vzorcov (1.6) matematickou indukciou vzhľadom na m . Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom pre $m = 1$ je podľa definície 1.6.1

$$x^{n+1} = x^n x^1.$$

Ďalej, nech pre $m = k \in \mathbb{N}$ platí

$$x^{n+k} = x^n x^k.$$

Potom pre $m = k + 1$ máme

$$x^{n+m} = x^{n+k+1} = x^{n+k} x^1 = x^n x^k x^1 = x^n x^{k+1} = x^n x^m.$$

Tým sme dokázali, že pre výrok, daný prvým zo vzorcov (1.6), sú splnené predpoklady vety 1.4.2. Preto podľa jej tvrdenia tento vzorec platí pre každé $m \in \mathbb{N}$, ale tiež (pozri začiatok úvahy) pre každé $n \in \mathbb{N}$. Podobným spôsobom možno dokázať platnosť druhého zo vzorcov (1.6) pre $n, m \in \mathbb{N}$. To nech si čitateľ dokáže sám.

O platnosti vzorcov (1.6) v prípade, že niektoré z čísel n, m sa rovná nule, môžeme sa presvedčiť priamym dosadením (prenechávame čitateľovi).

Ostávajú ešte dokázať platnosť vzorcov (1.6) v prípadoch, keď

- a) $n > 0, m < 0$ (resp. $n < 0, m > 0$), b) $n < 0, m < 0$.

Venujme sa prvému vzorcu.

Ak $n > 0, m = -p < 0$ pričom $p \leq n$, tak postupným použitím definície 1.6.2, už dokázaného a axióm B_4, B_3 máme

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^p} = x^{n-p} x^p \frac{1}{x^p} = x^{n-p} = x^{n+m}.$$

V prípade, keď $p > n$, z podobných dôvodov ako vyššie a podľa vety 1.3.3 máme

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^p} = x^n \frac{1}{x^n x^{p-n}} = x^n \frac{1}{x^n} \frac{1}{x^{p-n}} = \frac{1}{x^{p-n}} = x^{n+m},$$

čím je platnosť prvého zo vzorcov (1.6) dokázaná pre $n > 0, m < 0$ (prípady $n < 0, m > 0$ je vzhľadom na axiómy A_1, B_1 pre prvý zo vzorcov (1.6) nezaujímavý).

Ak $n = -q < 0, m = -p < 0$, tak podobne ako vyššie zistíme, že

$$x^n x^m = \frac{1}{x^q} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^{q+p}} = x^{n+m}$$

(čitateľ nech si pripomenie definície, vety, prípadne axiómy oprávňujúce písať uvedené rovnosti). Tým je platnosť prvého zo vzorcov (1.6) dokázaná. Podobne možno dokázať platnosť druhého zo vzorcov (1.6) pre prípady a), b). Dôkazy prenechávame čitateľovi. $\square$

Úloha 1.6.4. Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Matematickou indukciou dokážte:

a) Ak $x > 1$, tak pre každé prirodzené číslo n platí

$$x^n > x^{n-1} > \dots > x > 1.$$

b) Ak $0 < x < 1$, tak pre každé prirodzené číslo n platí

$$x^n < x^{n-1} < \dots < x < 1.$$

c) Ak $0 < x < y$, tak pre každé prirodzené číslo n platí

$$x^n < y^n.$$

Úloha 1.6.5. Nech $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ a nech $p \in \mathbb{Z}$. Dokážte, že platí

$$(xy)^p = x^p y^p.$$

1.7 Absolútna hodnota

V tomto článku uvidíme definíciu absolútnej hodnoty reálneho čísla a často potrebné vlastnosti tohoto pojmu. Začnime však iným pojmom.

Definícia 1.7.1. Ak pre dve reálne čísla x a y platí $x \leq y$, nazývame číslo x **minimom čísel** x, y a píšeme $x = \min\{x, y\}$ a číslo y nazývame **maximom čísel** x, y a píšeme $y = \max\{x, y\}$.

Napr. $\min\{2, 4\} = 2$, $\max\{1, -3\} = 1$.

Všimnime si, že pojmy minima a maxima dvojice reálnych čísel možno indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ predpismi

$$\begin{aligned} \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= \min\{\min\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}, x_n\}, \\ \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} &= \max\{\max\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}, x_n\}. \end{aligned}$$

Definícia 1.7.2. Nech $x \in \mathbb{R}$. **Absolútnou hodnotou čísla** x nazývame $\max\{x, -x\}$ a označujeme $|x|$, t.j. $|x| = \max\{x, -x\}$.

Z tejto definície ihneď vidíme, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

- a) $|x| \geq 0$,
- b) $|x| = x$, ak $x \geq 0$,
- c) $|x| = -x$, ak $x < 0$,
- d) $|x| = |-x|$.

Ďalšie vlastnosti absolútnej hodnoty sú obsiahnuté v nasledujúcich vetách.

Veta 1.7.3. *Nech $a \in \mathbb{R}$. Potom*

$$-|a| \leq a \leq |a|. \quad (1.7)$$

Dôkaz. keďže $|a| \geq 0$, tak $-|a| \leq 0 \leq |a|$. Ak je $a > 0$, potom $-|a| \leq 0 < a = |a|$, t.j. (1.7) platí. Ak je $a < 0$, tak $|a| = -a$, a ďalej $-|a| = a < 0 \leq |a|$, tak (1.7) opäť platí. Konečne pre $a = 0$ je $-|a| = 0 = |a|$, čiže $-|a| = a = |a|$ a (1.7) znovu platí. $\square$

Veta 1.7.4. *Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom nerovnosť*

$$|x| < a \quad (1.8)$$

je splnená vtedy a len vtedy, keď

$$-a < x < a. \quad (1.9)$$

Dôkaz. Nech platí (1.8). Ak je $x \geq 0$, tak $|x| = x$. Preto $x = |x| < a$, a ďalej $-a < 0 \leq x = |x| < a$, t.j. $-a < x < a$, čo je (1.9). Ak je $x < 0$, tak $|x| = -x > 0$. Z (1.8) potom máme $0 < -x = |x| < a$. Teda $-a < x < 0 < |x| < a$, t.j. opäť je $-a < x < a$, čo je (1.9).

Nech teraz platí (1.9). Z nej máme $x < a$, a tiež $-x < a$. Preto $|x| = \max\{x, -x\} < a$, čo je nerovnosť (1.8). $\square$

Úloha 1.7.5. Dokážte, že veta 1.7.4 zostane v platnosti, ak v (1.8) a (1.9) znak $<$ nahradíme všade znakom $\leq$.

Veta 1.7.6. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom $|ab| = |a| |b|$.*

Dôkaz. Pre čísla a, b nastane práve jeden z prípadov 1) $a \geq 0, b \geq 0$; 2) $a \geq 0, b < 0$; 3) $a < 0, b \geq 0$; 4) $a < 0, b < 0$. Vetu dokážeme pre každý z uvedených prípadov.

1) $a \geq 0, b \geq 0$. Teraz máme $|a| = a, |b| = b, ab \geq 0$, teda aj $|ab| = ab$. Odtiaľ $|ab| = ab = |a| |b|$.

2) $a \geq 0, b < 0$. Vidíme, že $|a| = a, |b| = -b, ab \leq 0$ a $|ab| = -ab$. Potom $|ab| = -ab = a(-b) = |a| |b|$.

3) $a < 0, b \geq 0$. Teraz je $|a| = -a, |b| = b, ab \leq 0$ a $|ab| = -ab$. Preto môžeme písať $|ab| = -ab = |a| |b|$.

4) $a < 0, b < 0$. Teraz máme $|a| = -a, |b| = -b, ab > 0$ a $|ab| = ab$. Teda $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| |b|$. $\square$

Veta 1.7.7. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom*

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|. \quad (1.10)$$

Dôkaz. Podľa vety 1.7.3 máme

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Odtiaľ podľa vety 1.5.2 je

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

čo podľa vety 1.7.4 (pomocou úlohy 1.7.5) platí vtedy a len vtedy, keď

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Tým sme ukázali, že platí vzorec (1.10) so znamienkom $+$ na ľavej strane. Vzorec (1.10) so znamienkom $-$ teraz získame tým, že vo vzorci, ktorý sme vyššie získali, nahradíme b číslom $-b$ a uvážime, že $|-b| = |b|$. $\square$

Veta 1.7.8. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom*

$$|a| - |b| \leq |a \pm b|. \quad (1.11)$$

Dôkaz. Vzhľadom na vetu 1.7.7 môžeme písať

$$|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |b|,$$

a odtiaľ

$$|a| - |b| \leq |a + b|.$$

Podobne máme

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,$$

a odtiaľ

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \quad \square$$

Veta 1.7.9. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Potom*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b|. \quad (1.12)$$

Dôkaz. Podľa vety 1.7.4 a úlohy 1.7.5 vieme, že nerovnosť (1.12) je ekvivalentná s nerovnosťami

$$-|a \pm b| \leq |a| - |b| \leq |a \pm b|.$$

Vzhľadom na vetu 1.7.8 stačí ukázať, že

$$-|a \pm b| \leq |a| - |b|.$$

Keďže platí nerovnosť (1.11) a čísla a, b sú v nej rovnocenné, môžeme ich tam navzájom zameniť a máme

$$|b| - |a| \leq |b \pm a|. \quad (1.13)$$

Ďalej pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $|x| = |-x|$, tak aj $|a \pm b| = |b \pm a|$. Preto môžeme nerovnosť (1.13) zapísať v tvare

$$|b| - |a| \leq |a \pm b|, \quad \text{odkiaľ} \quad -|a \pm b| \leq |a| - |b|,$$

čo sme potrebovali dokázať. □

Veta 1.7.10. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Potom*

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Dôkaz. Zrejme platí, že $a = b \left(\frac{a}{b} \right)$. Podľa vety 1.7.6 máme

$$|a| = |b| \left| \frac{a}{b} \right|, \quad \text{odkiaľ} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}. \quad \square$$

Úloha 1.7.11. Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Označme

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Dokážte, že

$$\text{a) } \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad \text{b) } \left| \prod_{i=1}^n a_i \right| = \prod_{i=1}^n |a_i|.$$

1.8 Interval, okolie bodu, nevlastné číslo $+\infty$, $-\infty$

V tomto článku si stručne pripomeňme niektoré pojmy čitateľovi dobre známe zo strednej školy. Tak napríklad, množinu $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel budeme nazývať aj **číselnou osou** a reálne čísla jej **bodmi**. Číselnou osou pritom rozumieme priamku s vyznačenými dvoma bodmi, z ktorých jeden považujeme za obraz čísla nula a nazývame ho začiatok číselnej osi a druhý za obraz čísla 1. Predpokladáme, že čitateľovi je známa vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi reálnymi číslami a bodmi číselnej osi.

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množiny

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

budeme nazývať **interval**. V každom z týchto prípadov čísla a , b nazývame **koncovými bodmi** intervalu (a – ľavý, b – pravý koncový bod).

Interval (a, b) nazývame **otvorený**, interval $\langle a, b \rangle$ nazývame **uzavretý** a intervaly (a, b) , $\langle a, b \rangle$ nazývame **polouzavreté**.

Číslo $|\alpha - \beta|$ nazývame **dĺžkou intervalu** s koncovými bodmi α , β bez ohľadu na to, ktorý je ľavý (začiatočný) a ktorý pravý (koncový) bod, a tiež bez ohľadu na to, či ide o otvorený, uzavretý alebo polouzavretý interval. Teda $b - a$ je dĺžka každého z vyššie uvedených intervalov.

Bod intervalu, ktorý nie je jeho koncový bod nazývame **vnútorný bod**. Množinu všetkých vnútorných bodov intervalu nazývame **vnútro intervalu**.

Okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazývame každý otvorený interval, ktorý číslo a obsahuje. Ak $c \in \mathbb{R}$, $c < a$, tak interval (c, a) nazývame **ľavé okolie** bodu a a ak $d > a$, tak interval (a, d) nazývame **pravé okolie** bodu a .

Často budeme používať tzv. δ -okolie bodu a , resp. ε -okolie bodu a , čím budeme rozumieť interval $(a - \delta, a + \delta)$, resp. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. Všimnime si, že napr.

$$O_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}.$$

Okrem δ -okolía, resp. ε -okolía bodu a budeme pracovať aj s tzv. **prstencovými okoliami**. Ak $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, tak prstencovým δ -okolím bodu a budeme rozumieť δ -okolie bodu a

okrem bodu a . Je to teda množina

$$O_\delta^*(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}.$$

Je užitočné doplniť množinu $\mathbb{R}$ o tzv. „nevlastné čísla“ $+\infty$ a $-\infty$, ktoré do $\mathbb{R}$ nepatria a majú tú vlastnosť, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$-\infty < a < +\infty.$$

Teraz už môžeme hovoriť aj o intervaloch

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\ (b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}, \\ [b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}, \\ (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. O každom z týchto intervalov hovoríme, že je nekonečnej dĺžky.

Okolím nevlastného čísla $+\infty$ (resp. $-\infty$) budeme rozumieť každý interval $(k, +\infty)$ (resp. $(-\infty, k)$), kde $k \in \mathbb{R}$.

1.9 Dôsledky axiómy o hornej hranici

Najskôr definujme niektoré nové pojmy.

Definícia 1.9.1. Neprázdnu množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme **ohraničenou zhora (zdola)**, ak existuje $b \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$) také, že pre každé $x \in M$ je $x \leq b$ ($x \geq a$). Každé číslo b (a) s touto vlastnosťou nazývame **horným (dolným) ohraničením množiny** M .

Čitateľ nech sa sám presvedčí, že ak b (a) je horné (dolné) ohraničenie množiny M , tak aj každé číslo väčšie ako b (menšie ako a) je horné (dolné) ohraničenie množiny M .

Definícia 1.9.2. Neprázdnu množinu $M \subset \mathbb{R}$ nazveme **ohraničenou**, ak je ohraničená zhora aj zdola. Budeme hovoriť, že množina M je **neohraničená (neohraničená zhora, neohraničená zdola)**, ak M nie je ohraničená (nie je ohraničená zhora, nie je ohraničená zdola).

Príklad 1.9.3. Dokážme, že množina

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

je ohraničená.

Riešenie. Všimnime si, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $x^2 \geq 0$ a $x^2 + 1 > 0$. Preto pre každé $y \in M$ je $y \geq 0$. To znamená, že existuje $a = 0$ také, že pre každé $y \in M$ je $y \geq a$, teda množina M je ohraničená zdola.

Na druhej strane vieme, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $0 \leq x^2 < x^2 + 1$, odkiaľ

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} < 1.$$

To znamená, že existuje $b = 1$ také, že pre každé $y \in M$ je

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \leq 1,$$

teda množina M je ohraničená zhora. □

Všimnime si, že ohraničenosť množiny možno charakterizovať aj takto:

Veta 1.9.4. *Nech $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Množina M je ohraničená vtedy a len vtedy, keď existuje číslo $k > 0$ také, že pre každé $x \in M$ je $|x| \leq k$.*

Dôkaz. Nech množina M je ohraničená, t.j. existujú čísla $a, b \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in M$ je $a \leq x \leq b$. Položme $k = \max\{|a|, |b|\}$. Potom pre každé $x \in M$ máme

$$-k = -\max\{|a|, |b|\} \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \max\{|a|, |b|\} = k.$$

Teda pre každé $x \in M$ je $-k \leq x \leq k$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $|x| \leq k$ a nutná podmienka ohraničenosti množiny M je dokázaná.

Obrátene, nech existuje číslo $k > 0$ také, že pre každé $x \in M$ je $|x| \leq k$. Potom pre každé $x \in M$ je $-k \leq x \leq k$, čo znamená, že $-k$ je dolné a k horné ohraničenie množiny M , t.j. množina M je ohraničená. □

Definícia 1.9.5. Nech $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $d \in M$ ($c \in M$) nazývame **maximum** (**minimum**) množiny M a píšeme $d = \max M$ ($c = \min M$), ak pre každé $x \in M$ platí $x \leq d$ ($x \geq c$).

Príklad 1.9.6. Nech $M = \{-1, 3, 0, -7, 8, 4\}$. Vidíme, že horným ohraničením množiny M je číslo 8 aj každé číslo väčšie ako 8, dolným ohraničením je číslo -7 aj každé číslo menšie ako -7 , $\max M = 8$, $\min M = -7$.

Príklad 1.9.7. Nech $M = (0, 5)$. Táto množina je zdola ohraničená číslom 0 a každým záporným číslom. Zhora je ohraničená, napr. číslom 5. Vidíme, že $\max M = 5$, avšak $\min M$ neexistuje. Skutočne, lebo ak predpokladáme, že $\alpha = \min M$, tak musí platiť $\alpha \in M$, $\alpha > 0$. Potom však $0 < \frac{\alpha}{2} < \alpha$ odkiaľ plynie, že $\alpha/2 \in M$. To je spor s tým, že $\alpha/2 < \alpha$ a $\alpha = \min M$. To znamená, že také číslo α (t.j. minimum množiny M) neexistuje.

Príklad 1.9.8. Nech $M = (-\infty, 3)$. Čitateľ sa ľahko sám presvedčí, že táto množina je zdola neohraničená, nemá minimum, je zhora ohraničená a nemá maximum.

Z predchádzajúcich definícií 1.9.1, 1.9.5 vyplýva, že ak nejaká množina čísel M má maximum, tak ono je zároveň horné ohraničenie množiny M a naviac, že je to najmenšie horné ohraničenie množiny M . Na druhej strane, zhora ohraničená množina môže, ale nemusí mať maximum. Teda ohraničenosť zhora množiny M nie je postačujúcou podmienkou pre existenciu maxima tejto množiny. Čitateľ sa sám ľahko presvedčí, že analogické vzťahy sú medzi dolným ohraničením a minimom množiny. Už sme si všimli, že horné (dolné) ohraničenie množiny nie je určené jednoznačne (ak existuje jedno, existujú aj ďalšie). Je preto prirodzené položiť si otázku, či a kedy existuje najmenšie horné ohraničenie nejakej množiny čísel. Odpoveď na túto otázku dáva „axióma o hornej hranici“ (axióma C_5). Berúc do úvahy definíciu 1.9.1 môžeme odpoveď (t.j. axiómu C_5) sformulovať takto: Ak neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ je zhora ohraničená, tak existuje najmenšie horné ohraničenie množiny M . V znení axiomy C_5 je ním číslo S . Totiž, vlastnosť a) axiomy C_5 hovorí, že S je horné ohraničenie množiny M a vlastnosť b) zasa hovorí, že žiadne číslo menšie ako S nie je horným ohraničením množiny M . Toto číslo S budeme nazývať hornou hranicou množiny M , resp. **supremum množiny M** a budeme písať $S = \sup M$.

Aby sme sa dopracovali k odpovedi na podobnú otázku o existencii najväčšieho dolného ohraničenia množiny, uveďme nasledujúci poznatok.

Veta 1.9.9. Nech $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Nech M' je množina, ktorej prvkom je každé číslo opačné k niektorému číslu množiny M a žiadne iné. Potom platí:

- Ak je množina M ohraničená zhora (resp. zdola), je množina M' ohraničená zdola (resp. zhora).
- Ak je b (a) horné (resp. dolné) ohraničenie množiny M , je $-b$ ($-a$) dolné (resp. horné) ohraničenie množiny M' .
- Ak je množina M neohraničená zhora (resp. zdola), je množina M' neohraničená zdola (resp. zhora).

Dôkaz. Venujme sa dôkazu našej vety „bez zátvoriek“. Jej verzia so zátvorkami sa dokáže analogicky, preto dôkaz tejto verzie prenechávame čitateľovi.

Podľa definície 1.9.1 vieme, že množina je ohraničená zhora (zdola), ak existuje nejaké horné (dolné) ohraničenie tejto množiny. Ak teda dokážeme tvrdenie b) vety 1.9.9 bude tým dokázané aj jej tvrdenie a). Preto nech číslo b je horné ohraničenie množiny M , t.j. pre každé $x \in M$ je $x \leq b$. Ďalej, nech $y \in M'$ (inak ľubovoľné). Keďže $y = -(-y)$, tak $-y \in M$, čiže $-y \leq b$. Avšak nerovnosť $-y \leq b$ platí vtedy a len vtedy, keď $y \geq -b$ (veta 1.5.1). Zistili sme, že pre každé $y \in M'$ platí $y \geq -b$, t.j. číslo $-b$ je dolné ohraničenie množiny M' , čím je tvrdenie b), teda aj tvrdenie a), dokázané.

Ostáva dokázať pravdivosť tvrdenia c). Nech množina M je neohraničená zhora. To znamená, že neexistuje žiadne horné ohraničenie množiny M , alebo, čo je to isté, pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $x_0 \in M$ také, že $x_0 > \alpha$. Ak si uvedomíme, že ľubovoľnosť čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ znamená tiež ľubovoľnosť čísla $-\alpha \in \mathbb{R}$ a skutočnosť, že vzťah $x_0 > \alpha$ implikuje vzťah $-x_0 < -\alpha$ vidíme, že pre ľubovoľné číslo $-\alpha \in \mathbb{R}$ existuje číslo $-x_0 \in M'$ menšie ako $-\alpha$, čo znamená, že množina M' je neohraničená zdola.

□

Vecnú podstatu práve dokázanej vety odporúčame čitateľovi dobre si premyslieť.

Teraz sa už môžeme vyjadriť k otázke existencie a jednoznačnosti najväčšieho dolného ohraničenia množiny.

Veta 1.9.10. *Nech $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna zdola ohraničená množina. Potom existuje práve jedno reálne číslo s týchto vlastností:*

- a) *Pre každé $x \in M$ je $x \geq s$.*
- b) *ku každému číslu t takému, že $t > s$, existuje aspoň jeden prvok $x_1 \in M$ taký, že $x_1 < t$.*

Dôkaz. Ak M je neprázdna zdola ohraničená množina, tak množina M' , všetkých čísel opačných k číslam množiny M , je neprázdna a zhora ohraničená (veta 1.9.9). Potom podľa axiómy C_5 existuje $\sup M'$, označme ho S' . Položme $s = -S'$. keďže S' je horné ohraničenie množiny M' , tak číslo s je dolné ohraničenie množiny M , t.j. číslo s má vlastnosť a) zo znenia našej vety. Ak zvolíme ľubovoľné $t > s$, tak $-t < -s = S'$ a podľa vlastnosti b) suprema množiny vieme, že existuje $y_1 \in M'$ také, že $y_1 > -t$. Potom však $t > -y_1$ a $x_1 = -y_1 \in M$. Tým sme dokázali, že ku každému číslu $t > s$ existuje aspoň jedno $x_1 \in M$, pre ktoré platí $x_1 < t$. To znamená, že číslo $s = -S'$ má

požadovanú vlastnosť b). Tým je dokázaná existencia čísla s . Jeho jednoznačnosť plynie z jednoznačnosti suprema množiny M' .

□

Číslo s , majúce vlastnosti a), b) práve dokázanej vety, budeme nazývať **infimum množiny** M , resp. dolná hranica množiny M a budeme písať $s = \inf M$. Vidíme, že $\inf M$ je najväčšie dolné ohraničenie množiny M a podobne ako supremum nemusí patriť do množiny M .

Čitateľ nech sám preverí pravdivosť tvrdení nasledujúcich dvoch úloh.

Úloha 1.9.11. Nech $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna zhora (zdola) ohraničená množina. Potom platí:

$$\begin{aligned} \sup M \in M &\iff \exists \max M, \quad \text{pritom} \quad \max M = \sup M, \\ (\inf M \in M &\iff \exists \min M, \quad \text{pritom} \quad \min M = \inf M). \end{aligned}$$

Úloha 1.9.12. Nech množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna a ohraničená. Potom

$$\inf M \leq \sup M.$$

Pokračujme v úvahách o supreme a infime množiny nasledujúcimi dvoma vetami.

Veta 1.9.13. Nech množiny A, B ($A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$) sú neprázdne, nech $A \subset B$ a nech B je ohraničená množina. Potom množina A je ohraničená a platí

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf B \leq \inf A.$$

Dôkaz. Podľa predpokladov vety je množina B neprázdna a zhora ohraničená, teda existuje $\sup B$. Keďže $A \subset B$, tak pre každé $x \in A$ platí $x \in B$, preto $x \leq \sup B$. Číslo $\sup B$ je teda nejaké horné ohraničenie množiny A , t.j. množina A je zhora ohraničená. keďže je neprázdna a zhora ohraničená, tak existuje $\sup A$. Nakoľko $\sup A$ je najmenšie horné ohraničenie množiny A a $\sup B$ je nejaké horné ohraničenie množiny A , tak $\sup A \leq \sup B$. Ohraničenosť množiny A zdola a nerovnosť $\inf B \leq \inf A$ možno dokázať analogicky. □

Veta 1.9.14. Nech množiny A, B ($A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$) sú neprázdne. Nech pre ľubovoľné $x \in A$ a ľubovoľné $y \in B$ platí $x \leq y$. Potom množina A je ohraničená zhora, množina B je ohraničená zdola a $\sup A \leq \inf B$.

Dôkaz. Podľa predpokladov je každé $y \in B$ horným ohraničením množiny A . Množina A je preto ohraničená zhora. Ona je navyše neprázdna, teda existuje $\sup A$. keďže $\sup A$ je

najmenšie horné ohraničenie množiny A , tak pre každé $y \in B$ platí $\sup A \leq y$. To znamená, že množina B je zdola ohraničená číslom $\sup A$. Preto existuje $\inf B$, a keďže $\inf B$ je najväčšie dolné ohraničenie množiny B , tak $\sup A \leq \inf B$. $\square$

Vieme už, že neprázdna zhora ohraničená množina nemusí mať maximum (príklad 1.9.8) a neprázdna zdola ohraničená množina nemusí mať minimum (príklad 1.9.7). Platí však nasledujúca veta.

Veta 1.9.15. *[o maxime a minime konečnej množiny] Každá neprázdna konečná množina čísel má maximum aj minimum.*

Dôkaz. Dôkaz predstavuje jednoduché cvičenie na použitie matematickej indukcie. Prenechávame ho čitateľovi. $\square$

Pre ďalšie úvahy bude užitočný aj nasledujúci poznatok.

Veta 1.9.16. *[o dobrom usporiadaní] Každá neprázdna množina prirodzených čísel má minimum.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $n_0 \in M$. V množine $\mathbb{N}$ existuje práve n_0 čísel menších alebo rovných číslu n_0 . Potom v množine M existuje najviac n_0 čísel menších alebo rovných číslu n_0 . Tieto predstavujú konečnú neprázdnu množinu (aspoň číslo n_0 tam patrí). Podľa vety 1.9.15 táto množina má minimum, ktoré je zároveň minimom celej množiny M . $\square$

Cvičenie

1. Definíciou 1.9.2 sú zavedené štyri pojmy. Vyslovte štyri definície, ktoré v súhrne predstavujú definíciu 1.9.2 a každú z nich preformulujte v zmysle prvej vety definície 1.9.1.
2. Nech $M = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n \cdot 3}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Nájdite $\sup M$ a $\inf M$.
3. Nech $M = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Zistite, či množina M je ohraničená zhora, zdola; nájdite $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$, ak existujú.
4. Nech $M = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Zistite, či množina M je ohraničená; nájdite $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$, ak existujú.
5. Nech $M = \left\{\frac{2n+1}{3n-7}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Nájdite $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$, ak existujú.
6. Zistite, či množina $M = \left\{\frac{n^2+2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ je ohraničená.

7. Zistite, či množina $M = \left\{ \frac{1}{1-x}, x \in \mathbb{R}, x > 1 \right\}$ je ohraničená.
8. Nech $M = \{0,2; 0,22; 0,222; \dots\}$. Nájdite $\sup M$.
9. Nech $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 < 0\}$. Nájdite $\sup M$, $\inf M$, $\max M$ a $\min M$, ak existujú.
10. Zistite, či číslo 3 je $\sup M$, keď $M = \left\{ \frac{2n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1.10 Ďalšie vlastnosti reálnych čísel

Začnime tento článok výsledkom, ktorý je priamym pokračovaním úvah predchádzajúceho článku.

Veta 1.10.1. [Archimedov princíp] Množina všetkých prirodzených čísel je zhora neohraničená.

Dôkaz. Predpokladajme, že množina všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ je zhora ohraničená. Keďže ona je navyše neprázdna, tak existuje $\sup N$. Položme $S = \sup N$. Pre číslo $t = S - 1$ určite platí $t < S$ a podľa druhej vlastnosti suprema k nášmu číslu t existuje prirodzené číslo n_0 také, že $t < n_0$. Teda $t = S - 1 < n_0 \leq S$. Potom však $S < n_0 + 1$, čo je spor s tým, že $S = \sup N$, lebo číslo $n_0 + 1$ je prirodzené. $\square$

Dôsledkom vety 1.10.1 je dôležitá vlastnosť reálnych čísel, tzv. Archimedova vlastnosť.

Veta 1.10.2. [Archimedova vlastnosť] Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom existuje prirodzené číslo n také, že $na > b$.

Dôkaz. Nerovnosť $na > b$ je ekvivalentná s nerovnosťou $n > b/a$. Nech tvrdenie vety neplatí. Potom číslo b/a je väčšie alebo rovné ako každé prirodzené číslo, t.j. ono je horné ohraničenie množiny $\mathbb{N}$, čo je spor s vetou 1.10.1. $\square$

Archimedova vlastnosť dovoľuje presvedčiť sa o pravdivosti nasledujúcej vety.

Veta 1.10.3. [o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych] Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje aspoň jedno racionálne číslo r také, že $a < r < b$.

Dôkaz. Rozlišujeme prípady, keď

1. $a < 0 < b$,
2. $0 \leq a < b$,
3. $a < b \leq 0$.

Prípad 1. je veľmi jednoduchý, lebo môžeme položiť $r = 0 = \frac{0}{1}$.

Prípad 2. K číslam $b - a (> 0)$ a 1 podľa vety 1.10.2 existuje prirodzené číslo q také, že $(b - a)q > 1$, t.j. také, že $aq + 1 < bq$. Odtiaľ máme

$$aq < aq + 1 < bq. \quad (1.14)$$

Keďže $q > 0$, $a \geq 0$, tak $aq \geq 0$ a podľa vety 1.10.1 existujú čísla $n \in \mathbb{N}$ také, že $n > aq$. Množina týchto čísel má minimum (veta 1.9.16). Toto minimum označme p . Preň zrejme platí

$$aq < p, \quad p - 1 \leq aq.$$

Z týchto nerovností máme

$$aq < p \leq aq + 1.$$

Ak teraz využijeme vyššie odvodené nerovnosti (1.14), dostaneme nerovnosti

$$aq < p \leq aq + 1 < bq.$$

Odtiaľ delením s q získame nerovnosti

$$a < p/q < b,$$

a $r = p/q$ je zrejme racionálne číslo.

Prípad 3. vybavíme prechodom k číslam opačným k číslam a a b . Vieme, že nerovnosti $a < b \leq 0$ platia vtedy a len vtedy, keď $0 \leq -b < -a$. Podľa práve dokázaného existuje racionálne číslo r_1 také, že $-b < r_1 < -a$, resp. $a < -r_1 < b$, kde $-r_1$ je zrejme racionálne číslo. $\square$

Je užitočné si uvedomiť, že veta 1.10.3 platí aj v prípade, keď čísla a , b sú racionálne. Aký dôsledok z toho vyplýva?

Uveďme teraz pomocnú vetu (lemu), ktorú použijeme pri dôkaze existencie n -tej odmocniny kladného reálneho čísla.

Lema 1.10.4. *Nech $y, h \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $0 < h \leq 1$. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$(y + h)^n \leq y^n + h[(1 + y)^n - y^n] \quad (1.15)$$

a

$$(y - h)^n \geq y^n - h[(1 + y)^n - y^n]. \quad (1.16)$$

Dôkaz. Na základe predpokladov a podľa binomickej vety máme:

$$\begin{aligned}
 (y+h)^n &= y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h^2 + \dots + h^n = \\
 &= y^n + h \left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right] \leq \\
 &\leq y^n + h \left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2} + \dots + 1 \right] = \\
 &= y^n + h[(1+y)^n - y^n]
 \end{aligned}$$

a pravdivosť nerovnosti (1.15) je dokázaná. Podobne

$$\begin{aligned}
 (y-h)^n &= y^n - ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h^2 - \dots + (-1)^n h^n = \\
 &= y^n - h \left[ny^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h + \dots + (-1)^{n-1}h^{n-1} \right] \geq \\
 &\geq y^n - h \left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right] \geq \\
 &\geq y^n - h \left[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2} + \dots + 1 \right] = \\
 &= y^n - h[(1+y)^n - y^n]
 \end{aligned}$$

a pravdivosť nerovnosti (1.16) je dokázaná. $\square$

Veta 1.10.5. [o existencii a jednoznačnosti n -tej odmocniny] Nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje jediné kladné reálne číslo y také, že $y^n = x$. Toto číslo y nazývame **n -tou odmocninou čísla x** a píšeme $y = \sqrt[n]{x}$.

Dôkaz. Nech $A = \{z \in \mathbb{R} : z > 0, z^n < x\}$. Táto množina A je neprázdna. Skutočne, lebo ak $0 < x \leq 1$, tak pre číslo $\mathbb{Z}$ také, že $0 < z < x$ je $z^n < x^n < x$ (úloha 1.6.4), teda $z \in A$ a pre $x > 1$ zrejme $z = 1 \in A$. Okrem toho je množina A zhora ohraničená číslom 1, ak $x \leq 1$ a číslom x , ak $x > 1$ (úloha 1.6.4). To znamená, že existuje $\sup A$. Zrejme $\sup A > 0$. Položme

$$y = \sup A \tag{1.17}$$

a dokážeme, že $y^n = x$.

Pripusťme, že $y^n < x$ a položme $\varepsilon = x - y^n (> 0)$. Potom podľa lemy 1.10.4, pre ľubovoľné kladné $h \leq 1$ máme

$$(y+h)^n \leq y^n + h[(1+y)^n - y^n].$$

Ak vezmeme h také, že

$$0 < h < \frac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$$

(čitateľ nech si sám overí, že $0 < \frac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n} < 1$) zistíme, že $(y+h)^n \leq y^n + \varepsilon = x$, t.j. $(y+h)^n \leq x$. To znamená, že číslo $y+h \in A$, čo je spor so (1.17).

Teraz pripustíme, že $y^n > x$ a položíme $\varepsilon = y^n - x$. Opäť, podľa lemy 1.10.4, pre ľubovoľné kladné $h \leq 1$ platí

$$(y-h)^n \geq y^n - h[(1+y)^n - y^n].$$

Ak teraz vezmeme číslo h také, že

$$0 < h < \min \left\{ y, 1, \frac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n} \right\},$$

dostaneme

$$(y-h)^n > y^n - \varepsilon = x. \quad (1.18)$$

Keďže $0 < y-h < y = \sup A$, tak podľa druhej vlastnosti suprema existuje $z_1 \in A$ také, že $y-h < z_1$. Z toho, že $0 < y-h < z_1$ (podľa úlohy 1.6.4), vieme, že

$$(y-h)^n < z_1^n$$

a keďže $z_1 \in A$, tak $z_1^n < x$, čiže $(y-h)^n < x$, čo je spor s (1.18). Nakoľko k sporu vedie tak predpoklad $y^n < x$, ako aj predpoklad $y^n > x$, musí platiť $y^n = x$. Tým je existencia čísla y dokázaná. Jednoznačnosť $\mathbb{N}$ -tej odmocniny ľahko dokážeme pomocou úlohy 1.6.4. Predpokladajme, že existujú dve rôzne odmocniny čísla x , napr. $y_1 > 0$ a $y_2 > 0$. Nech $y_1 < y_2$. Potom

$$x = y_1^n < y_2^n = x, \quad \text{t.j.} \quad x < x$$

čo je spor. □

Pozrime sa teraz na niektoré vlastnosti n -tej odmocniny.

Veta 1.10.6. *Nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$. Potom $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$.*

Dôkaz. Položíme $u = \sqrt[n]{x}$, $v = \sqrt[n]{y}$, $w = \sqrt[n]{xy}$. Potom $u^n = x$, $v^n = y$, $w^n = xy$ a pomocou úlohy 1.6.5 máme

$$(uv)^n = u^n v^n = xy.$$

Z jednoznačnosti n -tej odmocniny je už zrejmé, že

$$w = uv, \quad \text{t.j.} \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$$

□

Úloha 1.10.7. Nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Dokážte, že

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

Úloha 1.10.8. Nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$. Dokážte, že

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

Veta 1.10.9. Nech $m, n \in \mathbb{N}$, nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Potom

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}.$$

Dôkaz. Položme $u = \sqrt[m]{x}$, $v = \sqrt[n]{u}$, $w = \sqrt[mn]{x}$. Potom $u^m = x$, $v^n = u$, $w^{mn} = x$. na základe vety 1.6.3 môžeme písať

$$x = u^m = (v^n)^m = v^{mn}, \quad \text{t.j.} \quad v = \sqrt[mn]{x}.$$

Z jednoznačnosti n -tej odmocniny ihneď máme

$$\sqrt[mn]{x} = w = v = \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}.$$

□

Pojem n -tej odmocniny môžeme ešte doplniť o n -tú odmocninu nuly a pre nepárne prirodzené číslo n aj o n -tú odmocninu záporného čísla.

Z definície mocniny s prirodzeným exponentom n plynie, že $0^n = 0$, preto kladieme $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ak je $x < 0$ a n nepárne prirodzené číslo, tak $\alpha = -x > 0$ a rovnica $y^n = x$ je ekvivalentná s rovnicou $(-y)^n = \alpha$. Skutočne, lebo

$$\begin{aligned} (-y)^n = \alpha &\iff ((-1)y)^n = -x \iff (-1)^n y^n = -x \iff \\ &\iff -y^n = -x \iff y^n = x. \end{aligned}$$

keďže $\alpha > 0$, tak existuje jediné kladné reálne číslo, označme ho $-y$, také, že $(-y)^n = \alpha$, teda $-y = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{-x}$, resp. $y = -\sqrt[n]{-x}$. Toto číslo y nazývame n -tou odmocninou čísla $x < 0$ a píšeme $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Napr. $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Veta 1.10.10. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$. Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Dôkaz. Ak predpokladáme, že $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ zistíme, že

$$(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{b})^n,$$

resp. $a = b$, čo je spor s predpokladom. Ak by platilo $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, tak podľa úlohy 1.6.4 máme $(\sqrt[n]{a})^n > (\sqrt[n]{b})^n$, resp. $a > b$, čo je opäť spor s predpokladom. Preto $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. $\square$

Teraz môžeme definovať pojem mocniny s racionálnym exponentom. Obmedzíme sa pritom na kladný základ.

Definícia 1.10.11. Nech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Nech $r \in \mathbb{Q}$, $r = p/q$, kde p, q sú celé čísla, $q > 0$. **Mocninou** a^r budeme rozumieť číslo $\sqrt[q]{a^p}$ (t.j. $a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$).

Prijatie tejto definície si zrejme vyžaduje isté vysvetlenie (overenie korektnosti). Predovšetkým vieme, že každé racionálne číslo r možno vyjadriť v tvare p/q nekonečne mnohými spôsobmi, napr. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \dots$, $-4 = \frac{-4}{1} = \frac{-8}{2} = \dots$. Musíme preto ukázať, že mocnina a^r má vždy tú istú hodnotu, nezávislú od spôsobu vyjadrenia čísla r v tvare p/q , kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Nech teda $a > 0$ a zlomky p/q , t/s (kde $p, t \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$) predstavujú dve rôzne vyjadrenia čísla $r \in \mathbb{Q}$. Položme $u = \sqrt[q]{a^p}$, $v = \sqrt[s]{a^t}$. Potom $u^q = a^p$ a $v^s = a^t$, a ďalej podľa vety 1.6.3 máme

$$a^{ps} = (a^p)^s = (u^q)^s = u^{qs}$$

a

$$a^{tq} = (a^t)^q = (v^s)^q = v^{sq}.$$

keďže

$$r = \frac{p}{q} = \frac{t}{s}, \quad \text{tak} \quad ps = qt,$$

a preto

$$u^{qs} = a^{ps} = a^{qt} = v^{qs}, \quad \text{t.j.} \quad u^{qs} = v^{qs} = a^{ps}. \quad (1.19)$$

Okrem toho vieme, že $u > 0$, $v > 0$, $qs \in \mathbb{N}$. Preto z (1.19) pomocou vety 1.10.5 máme

$$u = v,$$

resp.

$$a^r = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^t}.$$

Tým je dokázané, že hodnota mocniny a^r nezávisí od spôsobu vyjadrenia racionálneho čísla r . Ďalej, ak vo vyjadrení $r = p/q$ je $q = 1$, tak r je celé číslo, pre ktoré sme už

mocninu a^r definovali (definície 1.6.1 a 1.6.2). Musíme preto ukázať, že pre číslo r celé je hodnota a^r , určená definíciou 1.10.11, rovná hodnote a^r stanovenej podľa príslušnej definície mocniny s celočíselným exponentom. Táto rovnosť však naozaj platí, lebo ak r je celé číslo, tak $r = r/1$ a

$$a^r = a^{r/1} = \sqrt[1]{a^r}.$$

Všimnime si teraz základné vlastnosti mocniny s racionálnym exponentom.

Veta 1.10.12. *Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, nech $r, s \in \mathbb{Q}$. Potom*

- a) $a^r b^r = (ab)^r$, $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$,
- b) $a^r a^s = a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,
- c) ak $a < b$ a $r > 0$, tak $a^r < b^r$,
- d) ak $a > 1$ a $r > s$, tak $a^r > a^s$.

Dôkaz. Nech

$$r = \frac{p_1}{q_1}, \quad s = \frac{p_2}{q_2} \quad (p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Z}, q_1 > 1, q_2 > 1).$$

Ak tieto zlomky upravíme na spoločného menovateľa môžeme písať

$$r = \frac{p}{q}, \quad s = \frac{t}{q} \quad (\text{kde } q = q_1 q_2, p = p_1 q_2, t = p_2 q_1).$$

Použitím vety 1.10.6 a úlohy 1.6.5 máme

$$a^r b^r = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[q]{b^p} = \sqrt[q]{a^p b^p} = \sqrt[q]{(ab)^p} = (ab)^{p/q} = (ab)^r,$$

t.j. $a^r b^r = (ab)^r$, čo je prvý vzorec tvrdenia a). Pomocou neho ihneď získame druhý vzorec tvrdenia a), lebo

$$b^r \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(b \frac{a}{b}\right)^r = a^r, \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Pre odvodenie vzorcov tvrdenia b) použijeme opäť vetu 1.10.6 a vetu 1.6.3. Tak dostaneme

$$a^r a^s = \sqrt[q]{a^p} \sqrt[q]{a^t} = \sqrt[q]{a^p a^t} = \sqrt[q]{a^{p+t}} = a^{\frac{p+t}{q}} = a^{r+s},$$

t.j. $a^r a^s = a^{r+s}$, čo je prvý vzorec tvrdenia b).

Pre získanie druhého vzorca tvrdenia b) teraz máme

$$a^s a^{r-s} = a^{s+r-s} = a^r, \quad \text{resp.} \quad a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}.$$

Ďalej, ak $0 < a < b$ a $r > 0$ ($r = p/q$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), tak $p > 0$ a podľa úlohy 1.6.4 je

$$a^p < b^p.$$

Odtiaľ, podľa vety 1.10.10, máme

$$\sqrt[q]{a^p} < \sqrt[q]{b^p}, \quad \text{resp.} \quad a^r < b^r$$

a tvrdenie c) máme dokázané. Konečne, ak $a > 1$ a $r > s$, tak podľa práve dokázaného tvrdenia c) je

$$a^{r-s} > 1^{r-s}, \quad \text{resp.} \quad \frac{a^r}{a^s} > 1, \quad \text{resp.} \quad a^r > a^s$$

a tvrdenie d) je dokázané. □

Úloha 1.10.13. Nech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, nech $r \in \mathbb{Q}$. Dokážte

- a) $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$,
- b) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$,
- c) ak $a > 1$, $r > 0$, tak $a^r > 1$,
- d) ak $0 < a < 1$, $r > 0$, tak $a^r < 1$.

1.11 Mocnina s reálnym exponentom

V predchádzajúcich článkoch sme sa cez pojmy **mocnina s prirodzeným exponentom**, **mocnina s celočíselným exponentom** a **n-tá odmocnina** dopracovali k mocnine s racionálnym exponentom a k jej základným vlastnostiam. Pokračujme ešte v zovšeobecňovaní pojmu mocniny a definujme mocninu s reálnym exponentom.

Definícia 1.11.1. Nech $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Nech $a > 1$, $\alpha > 0$. Mocninou a^α budeme rozumieť číslo $\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$, t.j.

$$a^\alpha = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}.$$

- b) Pre $0 < a < 1$, $\alpha > 0$ definujeme

$$a^\alpha = \frac{1}{(1/a)^\alpha}.$$

- c) Pre $a = 1$, α ľubovoľné definujeme $1^\alpha = 1$.
- d) Pre $a > 0$, $\alpha < 0$ definujeme

$$a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}.$$

- e) Pre $a = 0$, $\alpha > 0$ definujeme

$$0^\alpha = 0.$$

Dodajme, že a^0 bolo dané v definícii 1.6.2 predpisom $a^0 = 1$ pre každé $a \in \mathbb{R}$. Pozrime sa na korektnosť definície 1.11.1. Vidíme, že najdôležitejšiu úlohu v uvedenej definícii hrá jej časť a). Venujme jej preto trochu pozornosti. Označme $A = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$. Podľa vety 1.10.3 existuje $r \in \mathbb{Q}$ také, že $0 < r < \alpha$. Potom $a^r \in A$, t.j. množina A je neprázdna. Podľa tej istej vety existuje $s \in \mathbb{Q}$, také, že $\alpha < s < \alpha + 1$. Pre toto číslo s a pre každé $r \in \mathbb{Q}$, $r \in (0, \alpha)$ platí $0 < r < s$. Odtiaľ podľa vety 1.10.12 máme $a^r < a^s$ (lebo $a > 1$). To znamená, že číslo a^s je horné ohraničenie množiny A . Teda množina A je neprázdna a zhora ohraničená. Preto $\sup A$ existuje. Naviac, ako už vieme, číslo $\sup A$ je jednoznačne určené. To znamená, že časť a) definície 1.11.1 je korektná, t.j. tam definované číslo a^α existuje a je jednoznačne určené. Korektnosť ďalších častí definície 1.11.1 odtiaľ vyplýva veľmi jednoducho, overenie prenechávame čitateľovi. Bude užitočné zapamätať si (z definície 1.11.1 to veľmi jednoducho vyplýva), že hodnota a^α ($a > 0$, α ľubovoľné) je vždy kladné číslo.

Pre $\alpha \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ už máme mocninu a^α danú definíciou 1.10.11. Keďže pre každé $\alpha \in \mathbb{Q}$ je $\alpha \in \mathbb{R}$, potrebujeme ešte ukázať, že v prípade, keď $\alpha \in \mathbb{Q}$, je číslo a^α stanovené definíciou 1.11.1 rovné číslu a^α určenému definíciou 1.10.11. Opäť sa budeme venovať len prípadu, keď $a > 1$, $\alpha > 0$. Ďalšie prípady prenechávame čitateľovi.

Najskôr si všimnime, že platia nasledujúce pomocné tvrdenia.

Lema 1.11.2. Ak $p, q \in \mathbb{R}$ a pre každé $t > 0$ je $p + t \geq q$, tak $p \geq q$.

Dôkaz. Nech $p < q$. Potom $q - p > 0$, $(q - p)/2 > 0$ a pre $t_1 = (q - p)/2$ máme

$$p + t_1 = p + \frac{1}{2}(q - p) = \frac{1}{2}(p + q) < \frac{1}{2}(q + q) = q.$$

Teda existuje číslo $t_1 > 0$ také, že $p + t_1 < q$, čo je spor s predpokladom, že pre každé číslo $t > 0$ je $p + t \geq q$. □

Lema 1.11.3. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že platí

$$a^{1/n_0} < b.$$

Dôkaz. Nech platia predpoklady vety a nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $a^{1/n} \geq b$. Potom podľa vety 1.10.12, pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a = (a^{1/n})^n \geq b^n.$$

Keďže $b > 1$, môžeme písať $b = 1 + h$, kde $h > 0$ a máme

$$b^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \dots + h^n > nh.$$

To znamená, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $a \geq b^n > nh$, čiže $a > nh$, čo je spor s Archimedovou vlastnosťou, a lema je dokázaná. $\square$

Teraz sme pripravení dokázať nasledujúcu vetu.

Veta 1.11.4. *Nech $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$. Nech a^α znamená hodnotu v zmysle definície 1.10.11. Potom*

$$a^\alpha = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}.$$

Dôkaz. Položme $A = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$. Vyššie sme už dokázali, že táto množina A je neprázdna a zhora ohraničená, teda existuje $\sup A$. Označme ho znakom L , t.j. $L = \sup A$ a máme dokázať, že $a^\alpha = L$.

Nech $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \alpha$. Potom podľa vety 1.10.12 je $a^r < a^\alpha$, a pretože pre každé $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \alpha$ je $a^r \in A$, tak číslo a^α je horné ohraničenie množiny A . Keďže $L = \sup A$ je najmenšie horné ohraničenie množiny A , tak $L \leq a^\alpha$.

Dokážeme ešte, že $a^\alpha \leq L$. Nech číslo $h > 0$ je ľubovoľné. Podľa lemy 1.11.3 k číslam $a > 1$ a $1 + h > 1$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že platí $a^{1/n_0} < 1 + h$. Zrejme je $\alpha - 1/n_0 \in \mathbb{Q}$, $\alpha - 1/n_0 < \alpha$. Ľahko sa nahliadne (pozri vetu 1.10.12), že číslo n_0 v $\mathbb{N}$ možno zvoliť tak, aby $\alpha - 1/n_0 > 0$. Potom $a^{\alpha-1/n_0} \in A$ a môžeme písať

$$L \geq a^{\alpha-1/n_0} = \frac{a^\alpha}{a^{1/n_0}} > \frac{a^\alpha}{1+h}.$$

Odtiaľ $L \geq \frac{a^\alpha}{1+h}$. keďže táto nerovnosť platí pre každé $h > 0$, platí tiež (použitím lemy 1.11.2) $L \geq a^\alpha$.

Z nerovností $L \leq a^\alpha$ a $L \geq a^\alpha$ máme $L = a^\alpha$, čo sme mali dokázať. $\square$

Touto vetou sme ukázali, že definície 1.11.1 a 1.10.11 sú pre $\alpha \in \mathbb{Q}$ ekvivalentné, t.j. nimi stanovené hodnoty a^α sú pre $\alpha \in \mathbb{Q}$ rovnaké.

Všimnime si teraz základné vlastnosti mocniny s reálnym exponentom. Pritom, vzhľadom na časť e) definície 1.11.1 a rovnosť $0^0 = 1$, stačí obmedziť sa na prípad, keď základ je kladný.

Veta 1.11.5. *Nech $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Potom*

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}. \quad (1.20)$$

Dôkaz. Pre $\alpha = 0$ vzorce (1.20) dávajú identitu $1 = 1$, preto sa obmedzíme len na prípad, keď $\alpha \neq 0$. Vetu dokážeme v štyroch častiach, a síce:

1. pre $a \geq 1, b \geq 1, \alpha > 0$,
2. pre $0 < a < 1, b \geq 1, \alpha > 0, (a \geq 1, 0 < b < 1, \alpha > 0)$
3. pre $0 < a < 1, 0 < b < 1, \alpha > 0$,
4. pre $a > 0, b > 0, \alpha < 0$.

Časť 1. Najprv dokážeme prvý zo vzorcov (1.20). Nech $a \geq 1, b \geq 1, \alpha > 0$. Označme

$$M_1 = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}, \quad M_2 = \{b^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}, \\ M = \{(ab)^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}.$$

Zrejme $a^\alpha = \sup M_1, b^\alpha = \sup M_2$ a $(ab)^\alpha = \sup M$. Vieme už, že prvkami množín M_1, M_2 a M sú kladné čísla, preto aj suprema týchto množín, t.j. čísla a^α, b^α a $(ab)^\alpha$, sú kladné čísla. Okrem toho pre každé $r \in \mathbb{Q}$ také, že $0 < r < \alpha$ platí

$$(ab)^r = a^r b^r < a^\alpha b^\alpha \quad (\text{lebo } 0 < a^r < a^\alpha, 0 < b^r < b^\alpha),$$

čo znamená, že číslo $a^\alpha b^\alpha$ je horné ohraničenie množiny M . Keďže $(ab)^\alpha = \sup M$, tak

$$(ab)^\alpha \leq a^\alpha b^\alpha. \quad (1.21)$$

Predpokladajme, že $(ab)^\alpha < a^\alpha b^\alpha$. Potom

$$\frac{(ab)^\alpha}{b^\alpha} < a^\alpha = \sup M_1$$

a podľa druhej vlastnosti suprema existuje $a^{r_1} \in M_1$ také, že platí

$$\frac{(ab)^\alpha}{b^\alpha} < a^{r_1}, \quad \text{resp.} \quad (ab)^\alpha < a^{r_1} b^\alpha.$$

Odtiaľ máme

$$\frac{(ab)^\alpha}{a^{r_1}} < b^\alpha = \sup M_2$$

a opäť podľa druhej vlastnosti suprema existuje $b^{r_2} \in M_2$ také, že platí

$$\frac{(ab)^\alpha}{a^{r_1}} < b^{r_2}, \quad \text{resp.} \quad (ab)^\alpha < a^{r_1} b^{r_2}.$$

Označme $r = \max\{r_1, r_2\}$. Na základe vety 1.10.12 môžeme písať

$$(ab)^\alpha < a^{r_1} b^{r_2} \leq a^r b^r = (ab)^r.$$

Zrejme $r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha$, preto $(ab)^r \in M$ a zároveň

$$(ab)^r > (ab)^\alpha = \sup M,$$

čo je spor, preto z (1.21) máme

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

Druhý zo vzorcov (1.20) teraz pomocou práve dokázaného získame ihneď pre prípad, keď $1 \leq b \leq a$, t.j. keď $a/b \geq 1$. Teraz zrejme platí

$$b^\alpha \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(b \frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha, \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

Prípad, keď $1 \leq a < b$ vybavíme takto: Teraz máme $b/a > 1$, $a \geq 1$. Preto podľa už dokázaného platí

$$b^\alpha = \left(\frac{b}{a} a\right)^\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha a^\alpha.$$

Odtiaľ, podľa časti b) definície 1.11.1, dostaneme

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha.$$

Časť 2. Nech $0 < a < 1$, $b \geq 1$, $\alpha > 0$. Teraz máme

$$a^\alpha b^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha} b^\alpha = \left(\frac{b}{\frac{1}{a}}\right)^\alpha = (ab)^\alpha,$$

čo je prvý zo vzorcov (1.20). Podľa tohoto vzorca (keďže $b \geq 1$ a $0 < \frac{a}{b} < 1$) môžeme písať

$$b^\alpha \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(b \frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha, \quad \text{t.j.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

čo je druhý zo vzorcov (1.20).

Časť 3. Nech $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $\alpha > 0$. Pomocou definície 1.11.1 a už známych výsledkov (pri každom „ $=$ “ určte použitý poznatok) máme

$$a^\alpha b^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{ab}\right)^\alpha} = (ab)^\alpha,$$

čo je prvý zo vzorcov (1.20). Podobným spôsobom, pre druhý vzorec zistíme, že

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(a \frac{1}{b}\right)^\alpha = a^\alpha \left(\frac{1}{b}\right)^\alpha = a^\alpha \frac{1}{b^\alpha} = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

Časť 4. Nech $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$. Potom

$$a^\alpha b^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}} \frac{1}{b^{-\alpha}} = \frac{1}{(ab)^{-\alpha}} = (ab)^\alpha$$

a podobne

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\alpha} = \frac{b^{-\alpha}}{a^{-\alpha}} = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

□

Úloha 1.11.6. Dokážte, že platí nasledujúce tvrdenie: Nech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\prod_{i=1}^n a_i^\alpha = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^\alpha.$$

Pre dôkaz ďalšej vlastnosti mocniny bude užitočná nasledujúca pomocná veta.

Lema 1.11.7. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Potom pre každé $r \in \mathbb{Q}$ spĺňajúce podmienku $0 < r < \alpha + \beta$ existujú čísla $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ také, že

$$0 < r_1 < \alpha, \quad 0 < r_2 < \beta \quad \text{a} \quad r_1 + r_2 = r.$$

Dôkaz. Nech $0 < r < \alpha + \beta$. Položme

$$\alpha + \beta - r = \delta. \tag{1.22}$$

Zrejme je $\delta > 0$. Teraz zvolíme $r_1 \in \mathbb{Q}$ tak, aby platilo

$$\max\{0, \alpha - \delta\} < r_1 < \min\{\alpha, r\} \tag{1.23}$$

(čitateľ nech sám overí, že $\max\{0, \alpha - \delta\} < \min\{\alpha, r\}$).

Ak teraz vezmeme $r_2 = r - r_1$, tak $r_2 \in \mathbb{Q}$, $r_1 + r_2 = r$, a ďalej podľa (1.22) a (1.23) platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq r - \min\{\alpha, r\} \leq r - r_1 < r - \max\{0, \alpha - \delta\} = \\ &= r - \max\{0, r - \beta\} = \begin{cases} r, & \text{ak } r \leq \beta, \\ r - (r - \beta) = \beta, & \text{ak } r > \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Teda $0 < r_2 = r - r_1 < \beta$, pričom pre r_1 z (1.23) máme $0 < r_1 < \alpha$. □

Veta 1.11.8. Nech $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

Dôkaz. Veta zrejme platí, keď aspoň jedno z čísel α, β rovná sa nule, a tiež vtedy, keď $a = 1$. Ďalšie prípady, pre ktoré treba vetu dokázať sú:

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$;
2. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$;
3. $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $a > 1$;
4. $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$;

5. $\alpha < 0, \beta < 0, a > 1$;

6. $\alpha < 0, \beta < 0, 0 < a < 1$.

Prípad 1. Nech $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$. Označme množiny

$$M_1 = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}, \quad M_2 = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \beta\}, \\ M = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha + \beta\}.$$

Potom čísla $a^\alpha = \sup M_1, a^\beta = \sup M_2, a^{\alpha+\beta} = \sup M$ sú kladné. Nech číslo $r \in \mathbb{Q}$ je ľubovoľné také, že $0 < r < \alpha + \beta$. Potom $a^r \in M$. Podľa lemy 1.11.7 k číslu $\mathbb{R}$ existujú $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ také, že $0 < r_1 < \alpha, 0 < r_2 < \beta$ a $r_1 + r_2 = r$. Preto pomocou vety 1.10.12, definície množín M_1, M_2 a tiež z vlastnosti suprema môžeme písať

$$a^r = a^{r_1+r_2} = a^{r_1} a^{r_2} < a^\alpha a^\beta.$$

Odtiaľ vidíme, že číslo $a^\alpha a^\beta$ je horné ohraničenie množiny M , preto platí $\sup M = a^{\alpha+\beta} \leq a^\alpha a^\beta$. Predpokladajme, že

$$a^{\alpha+\beta} < a^\alpha a^\beta.$$

Potom

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^\beta} < a^\alpha = \sup M_1$$

a podľa druhej vlastnosti suprema existuje $a^p \in M_1$ také, že

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^\beta} < a^p, \quad (p \in \mathbb{Q}, 0 < p < \alpha), \quad \text{resp.} \quad \frac{a^{\alpha+\beta}}{a^p} < a^\beta = \sup M_2.$$

Teraz opäť podľa druhej vlastnosti suprema existuje $a^q \in M_2$ také, že

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^p} < a^q, \quad (p \in \mathbb{Q}, 0 < q < \beta), \quad \text{resp.} \quad a^{\alpha+\beta} < a^p a^q = a^{p+q}.$$

keďže $0 < p < \alpha, 0 < q < \beta$, tak $0 < p+q < \alpha + \beta$. Navyiac je $p+q \in \mathbb{Q}$, preto $a^{p+q} \in M$. Pritom $a^{p+q} > a^{\alpha+\beta} = \sup M$, čo je spor. Preto platí

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta.$$

Prípad 2. Nech $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < a < 1$. Potom na základe práve dokázaného a pomocou vety 1.11.2 dostaneme

$$a^\alpha a^\beta = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\alpha+\beta}}} = a^{\alpha+\beta}.$$

Prípád 3. Nech $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $a > 1$. Teraz na základe už dokázaného v časti 1 máme pre $\alpha + \beta > 0$

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^\alpha} = a^{-\alpha} a^{\alpha+\beta} = a^{-\alpha+\alpha+\beta} = a^\beta, \quad \text{resp.} \quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta,$$

pre $\alpha + \beta < 0$

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^\beta} = \frac{1}{a^\beta} \frac{1}{a^{-(\alpha+\beta)}} = \frac{1}{a^{\beta-(\alpha+\beta)}} = \frac{1}{a^{-\alpha}} = a^\alpha, \quad \text{resp.} \quad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta,$$

pre $\alpha + \beta = 0$ je $\beta = -\alpha > 0$, a ďalej $a^{\alpha+\beta} = a^0 = 1$,

$$a^\alpha a^\beta = a^\alpha a^{-\alpha} = \frac{a^\alpha}{a^\alpha} = 1,$$

teda $a^{\alpha+\beta} = 1 = a^\alpha a^\beta$.

Prípád 4. Dôkaz je v tomto prípade formálne ten istý ako v predchádzajúcom prípade, ibaže namiesto tvrdenia dokázaného v časti 1 teraz použijeme tvrdenie dokázané v časti 2.

Pre prípady 5 a 6 možno dôkaz vykonať súčasne. Tu znovu použijeme tvrdenie dokázané v časti 1 pre prípad 5 a použijeme tvrdenie dokázané v časti 2 pre prípad 6, čím v obidvoch prípadoch máme

$$a^{\alpha+\beta} = \frac{1}{a^{-(\alpha+\beta)}} = \frac{1}{a^{-\alpha+(-\beta)}} = \frac{1}{a^{-\alpha} a^{-\beta}} = a^\alpha a^\beta.$$

□

Úloha 1.11.9. Dokážte, že pre $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

Úloha 1.11.10. Dokážte pravdivosť nasledujúcich tvrdení. Nech $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Ak $a > 1$, $\alpha > 0$, tak $a^\alpha > 1$.
- b) Ak $a > 1$, $\alpha < 0$, tak $a^\alpha < 1$.
- c) Ak $0 < a < 1$, $\alpha > 0$, tak $a^\alpha < 1$.
- d) Ak $0 < a < 1$, $\alpha < 0$, tak $a^\alpha > 1$.

Veta 1.11.11. Nech $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom

- a) ak $a > 1$, $\alpha < \beta$, tak $a^\alpha < a^\beta$,
- b) ak $0 < a < 1$, $\alpha < \beta$, tak $a^\alpha > a^\beta$.

Dôkaz. Dôkaz časti a) Nech $a > 1$, $0 < \alpha < \beta$. Podľa definície 1.11.1 je

$$a^\alpha = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}, \quad a^\beta = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \beta\}.$$

Podľa vety 1.10.3 existujú čísla $s, t \in \mathbb{Q}$ také, že $0 < \alpha < s < t < \beta$. keďže pre každé $r \in \mathbb{Q}$ také, že $0 < r < \alpha$ je $r < s$, tak podľa vety 1.10.12 je $a^r < a^s$, t.j. číslo a^s je horné ohraničenie množiny $\{a^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$, preto tiež

$$a^\alpha \leq a^s. \quad (1.24)$$

Ďalej priamo z definície 1.11.1 máme

$$a^t \leq a^\beta. \quad (1.25)$$

konečne podľa vety 1.10.12 je

$$a^s < a^t. \quad (1.26)$$

Z (1.24), (1.25) a (1.26) vidíme, že

$$a^\alpha \leq a^s < a^t \leq a^\beta, \quad \text{t.j.} \quad a^\alpha < a^\beta.$$

Nech teraz $a > 1$, $0 = \alpha < \beta$. Potom $a^\alpha = a^0 = 1$, $a^\beta > 1$ (podľa úlohy 1.11.10), teda $a^\alpha = 1 < a^\beta$, resp. $a^\alpha < a^\beta$.

Ak je $a > 1$, $\alpha < 0 < \beta$, tak podľa úlohy 1.11.10 $a^\beta > 1$, $a^\alpha < 1$. Vidíme, že $a^\alpha < 1 < a^\beta$, t.j. $a^\alpha < a^\beta$.

Pre $a > 1$, $\alpha < \beta = 0$ máme $a^\alpha < 1$, $a^\beta = a^0 = 1$, teda $a^\alpha < a^\beta$.

Nakoniec pre $a > 1$, $\alpha < \beta < 0$ je $0 < -\beta < -\alpha$ a ďalej

$$a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}, \quad a^\beta = \frac{1}{a^{-\beta}}.$$

Potom podľa už dokázaného

$$a^{-\beta} < a^{-\alpha}, \quad \text{t.j.} \quad \frac{1}{a^\beta} < \frac{1}{a^\alpha}, \quad \text{alebo} \quad a^\alpha < a^\beta$$

a časť a) je dokázaná.

Časť b) vety 1.11.11 teraz už dokážeme veľmi jednoducho. Totiž teraz je $1/a > 1$, preto podľa už dokázaného je

$$\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha < \left(\frac{1}{a}\right)^\beta.$$

Na druhej strane už vieme, že

$$\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha = \frac{1}{a^\alpha}, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^\beta = \frac{1}{a^\beta}.$$

Preto

$$\frac{1}{a^\alpha} < \frac{1}{a^\beta}, \quad \text{resp.} \quad a^\alpha > a^\beta.$$

□

K dôkazu ďalšej vlastnosti mocniny budeme potrebovať nasledujúcu pomocnú vetu.

Lema 1.11.12. *Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Potom pre každé $t \in \mathbb{Q}$ spĺňajúce podmienku $0 < t < \alpha\beta$ existujú čísla $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ také, že*

$$0 < t_1 < \alpha, \quad 0 < t_2 < \beta \quad \text{a} \quad t_1 t_2 = t.$$

Dôkaz. Nech $t \in \mathbb{Q}$, $0 < t < \alpha\beta$. Položme

$$\delta = \frac{\alpha\beta}{t}.$$

Zrejme je $\delta > 1$, a preto je $\alpha/\delta < \alpha$. Ak teraz zvolíme $t_1 \in \mathbb{Q}$ také, že

$$\frac{\alpha}{\delta} < t_1 < \alpha,$$

tak $0 < t_1 < \alpha$ a pre $t_2 = t/t_1$ máme

$$0 < \frac{t}{\alpha} < t_2 < \frac{t}{\alpha/\delta} = \frac{t\delta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta,$$

čiže $0 < t_2 < \beta$. Naviac $t_2 \in \mathbb{Q}$ a $t_1 t_2 = t$. □

Veta 1.11.13. *Nech $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Potom*

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}. \quad (1.27)$$

Dôkaz. Vetu dokážeme najprv pre β celé, potom pre β racionálne a nakoniec pre β reálne. Nech sú splnené predpoklady vety.

a) Nech $\beta \in \mathbb{Z}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Ak $\beta > 0$, tak $\beta \in \mathbb{N}$ a matematickou indukciou vzhľadom na β dokážeme, že vzorec (1.27) platí. Skutočne, pre $\beta = 1$ ľavá strana (1.27) je $(a^\alpha)^1 = a^\alpha$, pravá strana (1.27) je $a^{\alpha \cdot 1} = a^\alpha$, teda pre $\beta = 1$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$ vzorec (1.27) platí. Nech pre prirodzené číslo β platí vzorec (1.27). Pomocou tohoto indukčného predpokladu, využitím definície 1.6.1 a vety 1.11.8 môžeme písať

$$(a^\alpha)^{\beta+1} = (a^\alpha)^\beta a^\alpha = a^{\alpha\beta} a^\alpha = a^{\alpha\beta+\alpha} = a^{\alpha(\beta+1)}.$$

Teda z vety o matematickej indukcii, (1.27) platí pre každé $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Ak je $\beta < 0$, tak pomocou už dokázaného dostaneme

$$(a^\alpha)^\beta = \frac{1}{(a^\alpha)^{-\beta}} = \frac{1}{a^{\alpha(-\beta)}} = a^{\alpha\beta}.$$

Konečne, pre $\beta = 0$ je $(a^\alpha)^\beta = 1 = a^{\alpha\beta}$.

b) Nech $\beta \in \mathbb{Q}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, t.j. $\beta = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. Ak položíme $a^\alpha = y$, $y^\beta = z$, tak

$$z = y^\beta = (a^\alpha)^\beta. \quad (1.28)$$

Na druhej strane, vzhľadom na tvar čísla β a podľa už dokázaného v časti a) tohoto dôkazu môžeme písať

$$z = y^\beta = y^{p/q} = \sqrt[q]{y^p} = \sqrt[q]{(a^\alpha)^p} = \sqrt[q]{a^{\alpha p}}. \quad (1.29)$$

Ďalej položíme

$$a^{\alpha\beta} = u.$$

Potom opäť z časti a)

$$u^q = (a^{\alpha\beta})^q = a^{\alpha\beta q} = a^{\alpha p}, \quad \text{preto} \quad u = \sqrt[q]{a^{\alpha p}}.$$

Odtiaľ a z (1.29) vidíme, že $u = z$. To vzhľadom na tvar čísla u a na vzťah (1.28) znamená, že

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

c) Nech $\beta \in \mathbb{R}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Teraz budeme postupne dokazovať prípady

c₁) $a > 0$, $\alpha = 0$ alebo $\beta = 0$,

c₂) $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

c₃) $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (resp. $a > 1$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$),

c₄) $a > 1$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$,

c₅) $a = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

c₆) $0 < a < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Prípady c₁) je triviálny, lebo ak napr. $\alpha = 0$, tak $(a^0)^\beta = 1^\beta = 1$, $a^{0\beta} = a^0 = 1$, teda $(a^0)^\beta = a^{0\beta}$.

V prípade c₂) podľa definície mocniny a vzhľadom na už dokázané v časti b) tohoto dôkazu môžeme písať

$$(a^\alpha)^\beta = \sup\{(a^\alpha)^r : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \beta\} = \sup\{a^{\alpha r} : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \beta\}.$$

Pre čísla $a^{\alpha r}$ množiny $A = \{a^{\alpha r} : r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \beta\}$ platí podľa vety 1.11.11

$$a^{\alpha r} < a^{\alpha\beta} \quad (\text{lebo } a > 1, \alpha r < \alpha\beta).$$

To znamená, že číslo $a^{\alpha\beta}$ je horné ohraničenie množiny A , preto

$$(a^{\alpha})^{\beta} = \sup A \leq a^{\alpha\beta}. \quad (1.30)$$

Na druhej strane, využitím lemy 1.11.12 môžeme písať

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &= \sup\{a^t : t \in \mathbb{Q}, 0 < t < \alpha\beta\} = \\ &= \sup\{a^{t_1 t_2} : t_1, t_2 \in \mathbb{Q}, 0 < t_1 < \alpha, 0 < t_2 < \beta\}. \end{aligned}$$

Pre čísla $a^{t_1 t_2}$ množiny $B = \{a^{t_1 t_2} : t_1, t_2 \in \mathbb{Q}, 0 < t_1 < \alpha, 0 < t_2 < \beta\}$ podľa dokázaného v časti b) tohoto dôkazu platí

$$a^{t_1 t_2} = (a^{t_1})^{t_2}.$$

Podľa vety 1.11.11 je $a^{t_1} < a^{\alpha}$, a odtiaľ podľa vety 1.10.12 máme

$$(a^{t_1})^{t_2} < (a^{\alpha})^{t_2}.$$

Nakoniec, opäť podľa vety 1.11.11 je (lebo pre $a > 1$, $\alpha > 0$ je $a^{\alpha} > 1$)

$$(a^{\alpha})^{t_2} < (a^{\alpha})^{\beta}.$$

Teraz vidíme, že platí

$$a^{t_1 t_2} = (a^{t_1})^{t_2} < (a^{\alpha})^{t_2} < (a^{\alpha})^{\beta},$$

teda číslo $(a^{\alpha})^{\beta}$ je horné ohraničenie množiny B , preto

$$a^{\alpha\beta} = \sup B \leq (a^{\alpha})^{\beta}.$$

Odtiaľ a z (1.30) dostávame vzorec (1.27).

V prípade c₃), pre $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$, teraz platí

$$(a^{\alpha})^{\beta} = \frac{1}{(a^{\alpha})^{-\beta}} = \frac{1}{a^{-\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}$$

a pre $a > 1$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$ môžeme zase písať

$$(a^{\alpha})^{\beta} = \left(\frac{1}{a^{-\alpha}}\right)^{\beta} = \frac{1}{(a^{-\alpha})^{\beta}} = \frac{1}{a^{-\alpha\beta}} = a^{\alpha\beta}.$$

Prípad c_4) vybavíme takto (cez už dokázaný prípad c_2))

$$(a^\alpha)^\beta = \left(\frac{1}{a^{-\alpha}}\right)^\beta = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-\alpha}}\right)^{-\beta}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^{-\alpha})^{-\beta}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\alpha\beta}}} = a^{\alpha\beta}.$$

Prípad c_5 je triviálny, lebo $(1^\alpha)^\beta = 1^\beta = 1$, $1^{\alpha\beta} = 1$, a teda $(1^\alpha)^\beta = 1^{\alpha\beta}$.

V prípade c_6) využitím už dokázaných prípadov máme

$$a^{\alpha\beta} = \frac{1}{(1/a)^{\alpha\beta}} = \frac{1}{((1/a)^\alpha)^\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^\alpha}\right)^\beta} = \frac{1}{\frac{1}{(a^\alpha)^\beta}} = (a^\alpha)^\beta.$$

Čitateľ nech si v prípadoch c_3) až c_6) sám doplní výsledky a definície, ktoré boli v týchto častiach dôkazu použité. $\square$

Veta 1.11.14. *Nech $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Potom*

- a) *ak $\alpha > 0$, tak $a^\alpha < b^\alpha$,*
- b) *ak $\alpha < 0$, tak $a^\alpha > b^\alpha$.*

Dôkaz. Vidíme, že $b/a > 1$. Potom pre $\alpha > 0$ podľa vety 1.11.11 platí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha > \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1.$$

Keďže podľa vety 1.11.5 je

$$\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha = \frac{b^\alpha}{a^\alpha},$$

tak

$$\frac{b^\alpha}{a^\alpha} > 1, \quad \text{resp.} \quad a^\alpha < b^\alpha$$

a tvrdenie a) je dokázané. Tvrdenie b) možno dokázať analogickým spôsobom, čo prenecháme čitateľovi. $\square$

1.12 Logaritmus

Obsah predchádzajúceho článku nám poskytuje poznatky k tomu, aby sme definovali pojem logaritmu a odvodili jeho vlastnosti.

Definícia 1.12.1. Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Reálne číslo y také, že $a^y = x$ nazývame **logaritmus čísla x pri základe a** , a píšeme $y = \log_a x$.

V nasledujúcej vete ukážeme, že táto definícia je korektná, t.j. že za podmienok na čísla a, x číslo y s požadovanou vlastnosťou vždy existuje, a že je určené jednoznačne.

Veta 1.12.2. *Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Potom existuje jedno a len jedno číslo $y \in \mathbb{R}$ také, že platí $a^y = x$.*

Dôkaz. Dôkaz existencie Uvažujme najprv prípad, keď $a > 1$, $x > 0$. Definujme množinu M predpisom $M = \{z \in \mathbb{R} : a^z < x\}$ a ukážme, že ona je neprázdna a zhora ohraničená. Keďže $a > 1$, môžeme písať $a = 1 + h$, $h > 0$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh. \quad (1.31)$$

Podľa Archimedovej vlastnosti vieme, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že $n_1 h > 1/x$, a tiež existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ také, že $n_2 h > x$. To vzhľadom na (1.31) znamená, že

$$a^{n_1} > n_1 h > 1/x, \quad \text{resp.} \quad a^{-n_1} < x,$$

teda $-n_1 \in M$, t.j. $M \neq \emptyset$, a ďalej

$$a^{n_2} > n_2 h > x,$$

čiže $n_2 \notin M$. Nech $z_1 \in M$. Potom pre každé $z \in \mathbb{R}$, $z \leq z_1$ je podľa vety 1.11.11

$$a^z \leq a^{z_1} < x, \quad \text{t.j.} \quad z \in M.$$

Keďže $n_2 \notin M$, tak pre každé $z \in M$ je $z < n_2$, čo znamená, že číslo n_2 je horné ohraničenie množiny M . Zistili sme, že množina M je neprázdna a zhora ohraničená, preto existuje $\sup M$. Položme

$$y = \sup M$$

a dokážeme, že $a^y = x$.

Predpokladajme, že $a^y < x$. Potom $x/a^y > 1$, $a > 1$ a podľa lemy 1.11.3 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že

$$a^{1/n_0} < \frac{x}{a^y} \quad \text{odkiaľ} \quad a^{y+1/n_0} < x.$$

To znamená, že $y + 1/n_0 \in M$, čo je spor s tým, že $y = \sup M$.

Teraz predpokladajme, že $a^y > x$. Potom $a^y/x > 1$, $a > 1$ a opäť podľa lemy 1.11.3 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že

$$a^{1/n_1} < \frac{a^y}{x}, \quad \text{odtiaľ} \quad x < a^{y-1/n_1}. \quad (1.32)$$

To znamená, že $y - 1/n_1 \notin M$. Keďže však $y - 1/n_1 < y = \sup M$, tak z druhej vlastnosti suprema vyplýva existencia čísla $u \in M$ takého, že $y - 1/n_1 < u$. Z poslednej nerovnosti podľa vety 1.11.11 a nerovnosti (1.32) dostaneme

$$x < a^{y-1/n_1} < a^u.$$

Teda $x < a^u$ a to znamená, že $u \notin M$, čo je spor.

Zistili sme, že nerovnosti $a^y < x$ a $a^y > x$ neplatia, preto platí $a^y = x$ a existencia čísla y je pre $a > 1$, $x > 0$ dokázaná.

Nech teraz je $0 < a < 1$, $x > 0$. Podľa vety 1.11.5 pre každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y}.$$

Položme $b = 1/a$. Potom $b > 1$ a podľa dokázaného v predchádzajúcej časti existuje $y \in \mathbb{R}$ také, že $b^y = 1/x$. Potom však

$$\frac{1}{x} = b^y = \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y},$$

odkiaľ $x = a^y$. Tým je časť vety hovoriaca o existencii čísla y dokázaná.

Dôkaz jednoznačnosti. Predpokladajme, že pre nejakú dvojicu čísel a, x , kde $a > 0$, $a \neq 1$ a $x > 0$ existujú dve rôzne čísla $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (napr. $y_1 < y_2$) také, že

$$a^{y_1} = x = a^{y_2}.$$

Keďže $y_1 < y_2$, tak podľa vety 1.11.11 platí

$$a^{y_1} < a^{y_2}, \text{ ak } a > 1 \quad \text{a} \quad a^{y_1} > a^{y_2}, \text{ ak } 0 < a < 1,$$

čo vylučuje možnosť $a^{y_1} = a^{y_2}$. Tým je veta kompletne dokázaná. $\square$

Základné vlastnosti logaritmu zhrnieme v nasledujúcej vete.

Veta 1.12.3. *Nech $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Potom platí*

- a) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$,
- b) $\log_a(\alpha\beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta$,
- c) $\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta$,
- d) $\log_a \alpha^\gamma = \gamma \log_a \alpha$,

- e) ak $a > 1$, $0 < \alpha < \beta$, tak $\log_a \alpha < \log_a \beta$,
 ak $0 < a < 1$, $0 < \alpha < \beta$, tak $\log_a \alpha > \log_a \beta$,
 f) $\log_a \alpha = \frac{\log_b \alpha}{\log_b a} = \log_b \alpha \cdot \log_a b$.

Dôkaz. a) $\log_a 1 = 0$, lebo $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, lebo $a^1 = a$.

b) Položme

$$u = \log_a \alpha, \quad v = \log_a \beta.$$

Potom $a^u = \alpha$, $a^v = \beta$ a ďalej, využívajúc vlastnosti mocnín máme

$$a^{u+v} = a^u a^v = \alpha \beta,$$

čo podľa definície 1.12.1 znamená, že

$$\log_a(\alpha\beta) = u + v = \log_a \alpha + \log_a \beta.$$

c) Pri zachovaní označenia z predchádzajúcej časti dôkazu máme

$$a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v} = \frac{\alpha}{\beta},$$

preto

$$\log_a \frac{\alpha}{\beta} = u - v = \log_a \alpha - \log_a \beta.$$

d) Pre $\gamma = 0$ zrejme platí

$$\log_a \alpha^\gamma = \log_a 1 = 0 = 0 \cdot \log_a \alpha = \gamma \log_a \alpha,$$

preto sa môžeme obmedziť na prípad $\gamma \neq 0$. Ak teraz položíme

$$v = \log_a \alpha^\gamma,$$

tak podľa definície logaritmu máme

$$a^v = \alpha^\gamma,$$

a ďalej, podľa vety 1.11.13 platí

$$a^{v/\gamma} = (a^v)^{1/\gamma} = (\alpha^\gamma)^{1/\gamma} = \alpha.$$

Teda

$$\log_a \alpha = \frac{v}{\gamma},$$

alebo

$$\log_a \alpha^\gamma = v = \gamma \log_a \alpha.$$

e) Pri označení $u = \log_a \alpha$, $v = \log_a \beta$ máme

$$a^u = \alpha, \quad a^v = \beta$$

a pomocou vety 1.11.11 ľahko zistíme, že ak $a > 1$, $0 < \alpha < \beta$, tak $u < v$ (prípady $u = v$ a $u > v$ vedú k sporu s predpokladom $\alpha < \beta$), teda

$$\log_a \alpha < \log_a \beta.$$

Nerovnosť

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \quad \text{pre} \quad 0 < a < 1 \quad \text{a} \quad 0 < \alpha < \beta$$

možno odvodiť analogickým spôsobom, preto odvodenie prenechávame čitateľovi.

f) Položme znovu $u = \log_a \alpha$. Potom $a^u = \alpha$ a pomocou už dokázaného tvrdenia d) môžeme písať

$$\log_b \alpha = \log_b a^u = u \cdot \log_b a = \log_a \alpha \cdot \log_b a. \quad (1.33)$$

Pretože $a \neq 1$, tak podľa práve dokázaného tvrdenia e) je $\log_b a \neq 0$, a teda z (1.33) máme

$$\log_a \alpha = \frac{\log_b \alpha}{\log_b a}.$$

Ak v tomto vzorci položíme $\alpha = b$ zistíme, že

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

preto môžeme písať

$$\frac{\log_b \alpha}{\log_b a} = \log_b \alpha \cdot \log_a b.$$

□

Cvičenie

1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$

b) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$

2. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$ platí: $2^n > n^2$.

3. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deliteľné číslom 133.
4. Dokážte, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $(1+x)^n \geq 1+nx$.
5. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2 Postupnosť čísel

2.1 Limita postupnosti

Čitateľ sa s pojmom postupnosti, presnejšie postupnosti čísel, stretol na strednej škole a to hlavne s geometrickou postupnosťou. Upresnime, čo budeme rozumieť pod pojmom postupnosť čísel.

Definícia 2.1.1. Nech každému prirodzenému číslu n je priradené nejaké reálne číslo a_n . Potom hovoríme, že je daná postupnosť čísel (alebo postupnosť)

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}. \quad (2.1)$$

Postupnosť čísel budeme označovať $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; **a_n** – nazývame **n -tým členom postupnosti čísel**, **n** – nazývame **index člena** a_n . V celej kapitole sa budeme zaoberať iba postupnosťami čísel, preto pre stručnejšie vyjadrenie budeme používať iba skrátený termín postupnosť.

Postupnosť môže byť daná rôznymi spôsobmi. Napr.

1. Pomocou formuly, ktorá dovoľuje vypočítať ľubovoľný člen postupnosti podľa jeho indexu.

Príklad 2.1.2. a) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ je postupnosť

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \quad \text{resp.} \quad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}. \quad (2.2)$$

b) $a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$, $a_{2n} = \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ je postupnosť

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots\right\}. \quad (2.3)$$

c) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je postupnosť

$$\{-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}, \quad \text{resp.} \quad \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}. \quad (2.4)$$

2. Rekurentným vzťahom (rekurentne daná postupnosť), ktorý dovoľuje vypočítať člen postupnosti pomocou známych predchádzajúcich členov.

Príklad 2.1.3. a) Aritmetická postupnosť s diferenciou d a prvým členom $a_1 = a$ je daná rekurentným vzťahom $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Geometrická postupnosť s kvocientom $q \neq 0$ a prvým členom $b_1 = b$ je daná rekurentným vzťahom $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Rekurentným vzťahom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a podmienkami $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ je daná Fibonacciho postupnosť.¹

3. Opísaním jej členov. Napr. a_n je v poradí n -té prvočíslo. Tak $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, atď.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme zobrazit:

1. v rovine bodmi so súradnicami $[n, a_n]$, $n \in \mathbb{N}$;
2. bodmi a_n , $n \in \mathbb{N}$ na reálnej číselnej osi.

Pri vyšetrovaní vlastností postupností budeme potrebovať operácie s postupnosťami. Nech sú dané dve postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ich **súčtom, rozdielom, súčinom, podielom** nazývame postupne postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Pri definícii podielu sa predpokladá, že $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Dve postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ považujeme za **rovnaké**, ak $a_n = b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Každá číselná postupnosť určuje množinu reálnych čísel, ktorú tvoria tie reálne čísla, ktoré vystupujú ako členy tejto postupnosti. Túto množinu nazývame **množinou členov** postupnosti. Napr. postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ určuje množinu členov $\{-1; 1\}$. Dve rôzne postupnosti môžu určovať tú istú množinu členov. Napr. postupnosti (2.2), (2.3) sú rôzne, ale majú tú istú množinu členov $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Z definície postupnosti vieme, že sa jedná vždy o nekonečnú postupnosť, avšak množina členov postupnosti môže byť aj konečná (napr. postupnosť (2.4)).

Jednou zo základných operácií matematickej analýzy je operácia limitného prechodu. S touto operáciou sa v matematickej analýze stretávame v rôznych formách. V tejto kapitole sa oboznámime s jednoduchou formou operácie limitného prechodu založenom na pojme limity postupnosti čísel.

Pozrime sa bližšie na postupnosť $\{\frac{n-1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, t.j.

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{100}{101}, \frac{101}{102}, \dots, \frac{1000}{1001}, \frac{1001}{1002}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}. \quad (2.5)$$

Vidíme, že ak zväčšujeme index n , člen postupnosti a_n sa blíži k 1. Hovoríme tomu, že postupnosť (2.5) má limitu 1. Upresníme, čo znamená „člen postupnosti a_n sa blíži k 1“. Ak zadáme kladné číslo ε , dokážeme v postupnosti nájsť istý člen, počnúc ktorým

¹Leonardo Pisanský (zvaný Fibonacci) [1170–1240]. Fibonacciho postupnosť sa objavuje v úlohe o králikoch. Koľko párov králikov má jeden pár po roku, ak každému páru sa každý mesiac narodí jeden pár, ktorý je schopný rozmnožovať sa za mesiac a ak ani jeden pár nezahynie?

sa všetky ďalšie členy líšia od 1 o menej než ε , t.j. vieme udať číslo n_0 také, že všetky členy postupnosti, ktorých index je väčší ako n_0 , spĺňajú nerovnosť $|a_n - 1| < \varepsilon$. Ak $\varepsilon = 10^{-2}$ zoberme $n_0 = 100$, potom pre všetky $n > 100$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < 10^{-2}.$$

Ak ε je ľubovoľné kladné číslo zoberme $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, potom pre všetky $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Definícia 2.1.4. Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazývame **limitou postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ak číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zapisujeme to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alebo $a_n \rightarrow a$ pre $n \rightarrow \infty$.

Pomocou kvantifikátorov môžeme zapísať túto definíciu takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentnou**. Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazývame **divergentnou**. Je to taká postupnosť, pre ktorú žiadne reálne číslo nie je jej limitou.

Úloha 2.1.5. Utvorte negácie nasledujúcich tvrdení a zapíšte ich pomocou kvantifikátorov.

- a) číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,
- b) postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.

Príklad 2.1.6. Použitím definície 2.1.4 nájdime limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:

- a) $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$; b) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ c) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie. a) Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. Nech je dané ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Nerovnosť $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ je splnená pre každé $n \in \mathbb{N}$.

b) Upravme výraz pre a_n : $a_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$. Ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Odhadnime výraz

$$|a_n - 2| = \left| 2 - \frac{3}{n+1} - 2 \right| = \frac{3}{n+1}.$$

Nech je dané ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Nerovnosť $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$ bude splnená, ak $n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$, t.j. $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Ak položíme $n_0 = \frac{3}{\varepsilon} - 1$, potom pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - 2| = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{n_0+1} = \varepsilon. \quad \text{Teda } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

c) Upravme výraz pre a_n .

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

odkiaľ $|a_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Nerovnosť $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ bude splnená ak $\sqrt{n} > \frac{1}{2\varepsilon}$, t.j. $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Ak položíme $n_0 = \frac{1}{4\varepsilon^2}$, potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí

$$|a_n| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n_0}} = \varepsilon \quad \text{čo znamená, že } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

□

Príklad 2.1.7. Dokážme, že postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná.

Riešenie. Potrebujeme ukázať, že žiadne reálne číslo a nemôže byť limitou.

Nech $a \neq \pm 1$ a $\varepsilon = \min\{|a+1|, |a-1|\}$. Potom

$$|a_n - a| = |(-1)^n - a| = \begin{cases} |1 - a| \geq \varepsilon, & \text{pre } n\text{-párne, } n \in \mathbb{N} \\ |-1 - a| = |1 + a| \geq \varepsilon, & \text{pre } n\text{-nepárne, } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Nech $a = 1$. Zoberme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Potom pre všetky n -nepárne, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - a| = |-1 - 1| = 2 > \frac{1}{2}.$$

Ukázali sme, že existuje $\varepsilon = \frac{1}{2}$ také, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$ existuje n -nepárne, $n > k$, $n \in \mathbb{N}$ také, že platí $|a_n - a| \geq \frac{1}{2}$.

Analogicky, ak $a = -1$ zoberme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Potom opäť pre všetky n -párne, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - a| = |1 + 1| = 2 > \frac{1}{2}.$$

□

Príklad 2.1.8. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Dokážme, že postupnosť

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}$$

konverguje a jej limita je rovná a .

Riešenie. Na základe definície 2.1.4 pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú čísla n_1, n_2 také, že

$$\begin{aligned} &\text{pre všetky } n > n_1, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon \\ &\text{a pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |b_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Označme z_n n -tý člen postupnosti $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots\}$. Ak $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ potom pre všetky $n > 2n_0$, $n \in \mathbb{N}$ bude $|z_n - a| < \varepsilon$. Pretože, ak $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ a $n > 2n_0$ je $z_n = b_k$, kde $k > n_0 > n_2$ a preto $|z_n - a| = |b_k - a| < \varepsilon$. Analogicky, ak $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ a $n > 2n_0$, potom $z_n = a_k$, kde $k > n_0 > n_1$ a preto $|z_n - a| = |a_k - a| < \varepsilon$.

Už vieme, čo rozumieme pod pojmom limita postupnosti. Zaujímá nás teraz koľko čísel môže byť limitou postupnosti. Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta 2.1.9. *Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve limity a, b , pričom $a \neq b$. Položme $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, takže $\varepsilon > 0$. Keďže a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak k zvolenému ε existuje číslo n_1 také, že

$$\text{pre všetky } n > n_1, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Podobne, keďže b je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak k zvolenému ε existuje číslo n_2 také, že

$$\text{pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n - b| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí (2.6) aj (2.7) takže

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|.$$

Ale keďže platí $|a - b| = |a - b|$, nemôže platiť aj $|a - b| < |a - b|$. Získané protirečenie dokazuje, že postupnosť nemôže mať dve rôzne limity. □

Veta 2.1.10. *Postupnosť*

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \quad (2.8)$$

má limitu práve vtedy, ak postupnosť

$$\{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+p}, \dots\}, \quad (2.9)$$

kde k je ľubovoľné prirodzené číslo, má limitu a obidve limity sú rovnaké.

Dôkaz. Prvý člen postupnosti (2.9) je a_{k+1} , druhý člen je a_{k+2} , n -tý člen je a_{k+n} . Označme členy postupnosti (2.9) $b_n = a_{k+n}$.

1. Nech existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ to znamená, že ak ε je ľubovoľné kladné číslo existuje k nemu číslo n_0 tak, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Ak je $n > n_0$, tým skôr $k + n > n_0$ a teda $|b_n - a| = |a_{n+k} - a| < \varepsilon$, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

2. Nech existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, to znamená, že k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_1 tak, že pre všetky $m > n_1$, $m \in \mathbb{N}$ platí $|b_m - a| < \varepsilon$. Položme $n_0 = n_1 + k$. Ak je $n > n_0$ je $n - k > n_0 - k = n_1$ a teda $|a_n - a| = |b_{n-k} - a| < \varepsilon$, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. $\square$

Veta 2.1.10 hovorí, že vlastnosti postupnosti ako sú konvergencia, divergencia, hodnota limity sa nezmenia ak pridáme, vynecháme alebo zmeníme konečný počet členov postupnosti. Predpis, ktorým je určený n -tý člen postupnosti, môže byť niekedy taký, že ním nie sú určené všetky členy postupnosti. Napr. $a_n = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$ nie sú určené členy a_2, a_3 . Veta 2.1.10 dovoľuje doplniť tieto členy akokoľvek.

Cvičenie

1. Pomocou definície dokážte nasledujúce tvrdenia:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2+1} = 0$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} = \frac{1}{3}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+3}} = \frac{3}{2}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right) = 2$.

2. Zistite, či postupnosť $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 3.

3. Dokážte, že postupnosť $\left\{\cos(n-1)\frac{\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentná.

4. Rozhodnite, či existujú limity nasledujúcich postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}; \quad a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je párne} \\ 1 + \frac{1}{n^2}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

5. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnú a práve vtedy, ak postupnosť $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnú nule.

6. Dokážte, že ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

7. Dokážte, že ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$.

2.2 Ohraničenosť postupnosti

Definícia 2.2.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **ohraničenou zhora** (resp. **zdola**), ak je ohraničená zhora (resp. zdola) množina členov tejto postupnosti. Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora aj zdola nazývame ju **ohraničenou**.

Použitím tejto definície a definícií 1.9.1, 1.9.2 sa ľahko overia nasledujúce vety.

Veta 2.2.2. *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora (resp. zdola), ak existuje číslo c_1 (resp. existuje číslo c_2) také, že pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n \leq c_1$ (resp. $a_n \geq c_2$).*

Veta 2.2.3. *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená práve vtedy, ak existuje číslo $c > 0$ také, že pre všetky členy postupnosti platí $|a_n| \leq c$.*

Úloha 2.2.4. Pomocou kvantifikátorov zapíšte dané tvrdenie a jeho negáciu. Tvrdenie:

1. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
2. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora.

Príklad 2.2.5. Vyšetrite ohraničenosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak a_n je dané predpisom:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n} ; \quad \text{b) } a_n = n ; \quad \text{c) } a_n = (-1)^n n.$$

Riešenie. a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je výraz $\frac{1}{n} > 0$, t.j. existuje $c_1 = 0$ také, že $\frac{1}{n} > c_1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$, odkiaľ $\frac{1}{n} \leq 1$, t.j. existuje $c_2 = 1$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \leq c_2$. To znamená, že postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zhora. Vzhľadom na definíciu 2.2.1 je táto postupnosť ohraničená.

b) Všetky prirodzené čísla sú kladné, t.j. $n > 0$. To znamená, že postupnosť $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola. Veta 1.10.1 hovorí, že postupnosť $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je zhora ohraničená.

c) Keďže $|(-1)^n n| = n$ podľa Archimedovho princípu (veta 1.10.1) máme, pre všetky $c > 0$ existuje $n_c \in \mathbb{N}$ také, že $n_c = |(-1)^{n_c} n_c| > c$, čo znamená, že postupnosť $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená. $\square$

Nasledujúca veta dáva do súvislosti konvergenciu a ohraničenosť postupnosti.

Veta 2.2.6. *Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, potom je ohraničená.*

Dôkaz. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Podľa definície 2.1.4 ku $\varepsilon = 1$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a| < 1$. Použitím vlastností absolútnych hodnôt dostaneme pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Zoberme $c = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$. Potom $|a_n| \leq c$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\square$

Obrátená veta ku vete 2.2.6 neplatí. Nie každá ohraničená postupnosť je konvergentná. Príkladom takej postupnosti je postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá je ohraničená ($\exists c = 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |(-1)^n| \leq 1$), ale nie je konvergentná (príklad 2.1.7).

Cvičenie

1. Uveďte príklady ohraničených postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ takých, že postupnosť $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená.
2. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená:
 - a) $a_n = \frac{n^2}{a^n}$, $a > 1$;
 - b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$;
 - c) $a_n = \frac{5n^2}{n^2+3}$;
 - d) $a_n = (-1)^n \frac{2n \cdot \sin n}{n+1}$.
3. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená:
 - a) $a_n = n^{(-1)^n}$;
 - b) $a_n = \frac{n\sqrt{n}}{3n+4}$;
 - c) $a_n = n \cdot \cos n$.
4. Nech existuje číslo $c > 0$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $|y_n| \geq c$ a nech postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Dokážte, že postupnosť $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

2.3 Operácie s konvergentnými postupnosťami

V tomto článku ukážeme niektoré vlastnosti konvergentných postupností, spojené s nerovnosťami a algebraickými operáciami.

Veta 2.3.1. *Nech pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:*

1. *existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$;*
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Potom postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Dôkaz. Podľa definície 2.1.4 pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existujú čísla n_2, n_3 také, že platí

$$\begin{aligned} |a_n - a| < \varepsilon & \text{ pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N} \\ |b_n - a| < \varepsilon & \text{ pre všetky } n > n_3, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Zoberme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Vzhľadom na predpoklad vety 2.3.1 a vzťahy (2.10) pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$ odkiaľ $|c_n - a| < \varepsilon$, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. $\square$

Príklad 2.3.2. Dokážme, že pre $a > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Riešenie. Keďže $a > 1$, potom $\sqrt[n]{a} > 1$. Označme $a_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$, potom $\sqrt[n]{a} = a_n + 1$. Použitím binomickej vety dostaneme

$$a = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k > na_n$$

a teda

$$0 < a_n < \frac{a}{n}, \quad \text{t.j.} \quad 0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}, \quad \text{resp.} \quad 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a}{n}.$$

Postupnosti $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1 + \frac{a}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné a obidve konvergujú ku 1. Použitím vety 2.3.1 dostávame $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. $\square$

Príklad 2.3.3. Nech platí $a_n \geq -1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dokážme, že potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1 + a_n} = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Riešenie. Dokážeme, že

$$1 - |a_n| \leq \sqrt[k]{1 + a_n} \leq 1 + |a_n|, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Ak $a_n \geq 0$, potom $1 \leq \sqrt[k]{1 + a_n} \leq \sqrt[k]{(1 + a_n)^k} = 1 + a_n = 1 + |a_n|$.

Ak $-1 \leq a_n \leq 0$, potom $1 \geq \sqrt[k]{1 + a_n} \geq \sqrt[k]{(1 + a_n)^k} = 1 + a_n = 1 - |a_n|$.

Nerovnosť (2.11) platí a z nej použitím vety 2.3.1 dostávame tvrdenie. $\square$

Veta 2.3.4. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, pričom $a < b$. Potom existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$.

Dôkaz. Zoberme v definícii limity $\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a) > 0$. Potom existujú čísla n_1, n_2 tak, že

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{pre všetky } n > n_1, n \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \text{pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Nech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platia (2.12) a (2.13), odkiaľ $a_n < a + \varepsilon = b - 2\varepsilon < b - \varepsilon < b_n$ a teda $a_n < b_n$ pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Veta 2.3.5. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ a existuje číslo n_1 také, že pre všetky $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Potom je $a \leq b$.

Dôkaz. Vetu dokážeme sporom. Predpokladajme, že $a > b$. Podľa vety 2.3.4 potom platí, že existuje číslo n_2 také, že pre všetky $n > n_2$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > b_n$. Pre $n > \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n > b_n$ a podľa predpokladu vety je $a_n \leq b_n$, čo je spor. $\square$

Veta 2.3.5 hovorí, že limitný prechod zachováva neostrú nerovnosť, t.j. ak platí neostrá nerovnosť medzi odpovedajúcimi členmi postupností, tá istá nerovnosť platí aj pre ich limity. Ostrá nerovnosť sa vo všeobecnosti limitným prechodom nemusí zachovať. Napríklad nech $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Platí $a_n > b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Nasledujúce vety sa zaoberajú algebraickými operáciami s konvergentnými postupnosťami.

Veta 2.3.6. *Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Potom:*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ za podmienky, že $b \neq 0$.

Dôkaz. a) Nech ε je ľubovoľné kladné číslo, potom aj $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Podľa predpokladu vety existujú čísla n_1, n_2 také, že

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre všetky } n > n_1, n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \\ |b_n - b| &< \varepsilon \quad \text{pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pre každé $n > n_0$ platia obidve nerovnosti v (2.14) a dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pre všetky $n > n_0, n \in \mathbb{N}$ čo znamená, že platí a).

b) Keďže postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná podľa vety 2.2.6 je ohraničená. Teda existuje $c > 0$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq c$. Položme $K = \max\{c, |a|\}$ a upravme

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |b_n||a_n - a| + |b_n - b||a| \leq \\ &\leq K(|a_n - a| + |b_n - b|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo, potom aj $\frac{\varepsilon}{2K}$ je kladné číslo. Podľa predpokladu vety existujú čísla n_1, n_2 také, že

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{pre všetky } n > n_1, n \in \mathbb{N} \\ \text{a } |b_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí (2.15), (2.16) a teda $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$. Tým sme dokázali, že platí b).

c) Postupnosť $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme chápať ako súčin postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{1}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Vzhľadom na prípad b) stačí dokázať, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Keďže $b \neq 0$ je $|b| > 0$ a k nemu, podľa predpokladu predpokladu vety, existuje číslo n_1 také, že pre všetky $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$, odkiaľ dostaneme

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b| > 0 \quad \text{pre } n > n_1. \quad (2.17)$$

To znamená, že $b_n \neq 0$ pre $n > n_1$ a výraz $\frac{1}{b_n}$ má zmysel. Pre $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ je podľa (2.17)

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{|b_n - b|}{\frac{1}{2}|b|^2}. \quad (2.18)$$

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo, potom aj $\frac{b^2\varepsilon}{2}$ je kladné číslo a podľa, predpokladu vety, k nemu existuje číslo n_2 také, že

$$\text{pre všetky } n > n_2, \quad n \in \mathbb{N} \text{ platí } |b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}. \quad (2.19)$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Podľa (2.18), (2.19) potom pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$, čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Použitím tejto vlastnosti a vlastnosti b) dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

□

Dôsledok 2.3.7. [vety 2.3.6]

1. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $c \in \mathbb{R}$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$.
2. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$.
3. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $k \in \mathbb{N}$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$.

Príklad 2.3.8. Nájdime:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2-4}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+3}), \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, 0 < a < 1.$$

Riešenie. a) Keďže $n^2 - 4 > 0$ pre $n > 2$ má daný zlomok zmysel pre $n \geq 3$. Čitateľ zlomku nemá limitu (nie je zhora ohraničený), analogicky nemá limitu menovateľ zlomku.

Upravme tento zlomok

$$\frac{2n^2-1}{n^2-4} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^2}}.$$

Na takto upravený zlomok môžeme použiť vetu 2.3.6 a jej dôsledok.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2.$$

b) Upravme najprv daný výraz

$$(\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 3}) = \frac{n^2 + 5 - n^2 - 3}{\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt{n^2 + 3}} = \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}}.$$

Použitím príkladu 2.3.3 a vety 2.3.6 dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 3}) = \frac{0}{1 + 1} = 0.$$

c) Z príkladu 2.3.2 vieme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 1$. Položme $b = \frac{1}{a}$. Pre $0 < a < 1$ je $b > 1$ a teda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Z vlastností mocnín $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Použitím vety 2.3.6 dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$. $\square$

V špeciálnom prípade pre limitu súčinu platí

Veta 2.3.9. *Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0.$$

Dôkaz. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, to znamená existuje číslo $c > 0$ také, že

$$\text{pre všetky } n \in \mathbb{N} \text{ platí } |b_n| \leq c.$$

Ďalej $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Podľa definície limity k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$, potom aj k $\frac{\varepsilon}{c} > 0$ existuje číslo n_0 také, že

$$\text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n > n_0 \text{ platí } |a_n| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Teda pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon, \quad \text{čo znamená} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0. \quad \square$$

Príklad 2.3.10. Vypočítajme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n}$.

Riešenie. Postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, postupnosť $\{\sqrt[n]{2}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < \sqrt[n]{2} \leq 2$. Vzhľadom na vetu 2.3.9 potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n} = 0$. $\square$

Dôkazy nasledujúcich viet prenechávame čitateľovi.

Veta 2.3.11. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

Uvedomme si, že veta 2.3.11 sa nedá obrátiť, ako ukazuje príklad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1 \text{ ale } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ neexistuje.}$$

V prípade, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ platí veta:

Veta 2.3.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ práve vtedy, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Cvičenie

1. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje. Čo môžeme povedať o konvergencii postupností $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$? Uveďte príklady.
2. Nech postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú. Môžeme tvrdiť, že postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú? Uveďte príklady.
3. Dokážte. Ak dve z postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú potom konvergujú všetky tri postupnosti.
4. Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, ak:
 - a) $a_n = \frac{(3n+2)^4 - (n-3)^4}{(2n^2+3)^2 + (n^2+1)^2}$;
 - b) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$;
 - c) $a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}$;
 - d) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$;
 - e) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$;
 - f) $a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^n + 3^{n+1}}$.
5. Dokážte, že:
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{5^n} = 0$;
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 0$.
6. Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, ak:
 - a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$;
 - b) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$;
 - c) $a_n = \left(\frac{7}{n}\right)^n$.

2.4 Nevlastná limita

Postupnosti $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_{2n-1} = n$, $a_{2n} = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sú divergentné, pretože nie sú ohraničené. Niektoré z divergentných postupností však majú vlastnosť, že s rastúcim indexom n členy postupnosti neohraničene rastú, resp. klesajú. Napr. postupnosti $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ resp. $\{-\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Vidíme, že tieto postupnosti sú konvergentné v tom zmysle, že so zväčšovaním indexu dochádza k približovaniu členov postupnosti $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ k nevlastnému číslu $+\infty$, a členov postupnosti $\{-\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ k nevlastnému číslu $-\infty$. Vyslovme preto túto definíciu.

Definícia 2.4.1. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **má nevlastnú limitu** $+\infty$, ak pre každé číslo A existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > A$.

Označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **má nevlastnú limitu** $-\infty$, ak

pre každé číslo A existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < A$.

Označujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Príklad 2.4.2. Dokážme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$.

Riešenie. Nech A je ľubovoľné číslo. Ak $A \geq 0$, potom nerovnosť $-\sqrt{n} < A$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ak $A < 0$, úpravou nerovnosti $-\sqrt{n} < A$ dostaneme $n > (-A)^2$. Položme $n_0 = (-A)^2$. Potom pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $-\sqrt{n} < A$, čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$. $\square$

Uvedieme niekoľko viet o nevlastných limitách, ktoré sú užitočné pre počítanie limit.

Veta 2.4.3. *Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.*

Dôkaz. Podľa definície 2.4.1 ku každému A a teda aj ku $A = 1$ existuje číslo n_1 také, že pre všetky $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| > A = 1 > 0$, čo znamená, že $\frac{1}{a_n}$ existuje pre všetky $n > n_1$.

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Potom pre $A = \frac{1}{\varepsilon}$ existuje n_2 také, že

$$\text{pre všetky } n > n_2, n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Posledná nerovnosť platí pre všetky $n > n_0$ a teda

$$\left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon \quad \text{pre všetky } n > n_0, n \in \mathbb{N},$$

čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. $\square$

Veta 2.4.4. *Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a existuje číslo n_1 také, že pre všetky $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.*

Dôkaz. Nech A je ľubovoľné číslo. Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, podľa definície 2.4.1 k nemu existuje číslo n_2 také, že

$$\forall n > n_2, n \in \mathbb{N} \implies a_n > A.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Vzhľadom na predpoklady vety dostávame

$$\forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \implies b_n \geq a_n > A,$$

čo znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. □

Príklad 2.4.5. Dokážme, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{ak } a > 1 \\ 1 & \text{ak } a = 1 \\ 0 & \text{ak } a \in (-1; 1). \end{cases}$$

Riešenie. Prípady $a = 0$, $a = 1$ sú triviálne.

Nech $a > 1$. Položme $h = a - 1$, potom $h > 0$, $a = h + 1$. Použitím binomickej vety dostaneme

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k > 1 + nh.$$

Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$ je aj $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ (veta 2.4.4).

Nech teraz $0 < |a| < 1$. Označme $b = 1/|a|$. Potom $b > 1$ a podľa predchádzajúceho prípadu $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$. Použitím vety 2.4.3 dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = 0$ a platí

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n|. \text{ Podľa vety 2.3.12 je } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

□

Veta 2.4.6. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

Dôkaz. Nech A je ľubovoľné číslo. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená, to znamená, že

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \geq K. \quad (2.20)$$

Podľa predpokladu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ to znamená, že ku každému číslu A' a teda aj pre $A' > A - K$ existuje číslo n_0 také, že

$$\exists n > n_0, n \in \mathbb{N} \implies a_n > A'. \quad (2.21)$$

Spojením (2.20) a (2.21) máme

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \implies a_n + b_n > A' + K > A,$$

t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$. □

Príklad 2.4.7. Vypočítajme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{n}{n^2+1}\right)$.

Riešenie. Postupnosť $\{n/(n^2+1)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená zdola ($n/(n^2+1) > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Podľa vety 2.4.6 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{n}{n^2+1}\right) = \infty$. $\square$

Veta 2.4.8. *Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ a existujú čísla n_1 , $K > 0$ také, že pre všetky $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \geq K > 0$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.*

Dôkaz. Nech A je ľubovoľné kladné číslo. Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, ku každému číslu A' , teda aj pre $A' > A/K$ existuje číslo n_2 také, že

$$\forall n > n_2, n \in \mathbb{N} \implies a_n > A'.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Vzhľadom na predpoklad vety z posledného vzťahu dostaneme

$$\forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \implies a_n b_n > A'K > A,$$

t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$. $\square$

Príklad 2.4.9. Vypočítajme $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(n+1)$.

Riešenie. Postupnosť $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená číslom 1 ($n+1 > 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$. Podľa vety 2.4.8 je $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(n+1) = \infty$. $\square$

V ďalšom texte pod slovom „limita“ budeme vždy rozumieť limitu v zmysle definície 2.1.4. Tejto limite sa hovorí **vlastná limita**. Keď budeme pripúšťať aj nevlastnú limitu pripomenieme to zvlášť. Podobne označenie „konvergentná postupnosť“ budeme používať len pre postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu.

Z vlastností postupností, ktoré sme doteraz uviedli, je zrejmé, že pre ľubovoľnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžu nastať len tieto prípady:

1. existuje vlastná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$;
4. neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita.

Cvičenie

1. Vypočítajte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n+1}{n^2+1}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 2n^3 + 3)$;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n^2 + 4)$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$.
2. Použitím definície 2.4.1 dokážte, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{(-n)} = -\infty.$$

3. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > -\infty$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$. Dokážte!
4. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty$. Dokážte!
5. Sformulujte a dokážte analogické tvrdenia k vetám 2.4.4, 2.4.6, 2.4.8 a vetám v cvičeniach 3. a 4. v prípade, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

2.5 Monotónne postupnosti

Monotónne postupnosti tvoria špeciálnu triedu postupností. V tejto časti nás budú zaujímať vlastnosti týchto postupností spojené s konvergenciou. Mali sme už vetu (veta 2.2.6), ktorá hovorila, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená. Ukázali sme, že obrátená veta k nej neplatí. Vzniká otázka, či sa nedá dokázať obrátená veta pre nejakú triedu postupností. Ukážeme, že touto triedou sú monotónne postupnosti.

Definícia 2.5.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **rastúcou** (resp. **neklesajúcou**), ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geq a_n$).

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **klesajúcou** (resp. **nerastúcou**), ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$).

Postupnosť nerastúcu alebo neklesajúcu nazývame **monotónna** postupnosť. Postupnosť rastúcu alebo klesajúcu nazývame **rýdzomonotónna** postupnosť.

Z definície je zrejmé, že každá rastúca (klesajúca) postupnosť je neklesajúca (nerastúca), ale nie naopak. Postupnosť, ktorá nie je rastúca nemusí byť ešte nerastúca. Napr. postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$, $a_{2n} = \frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ nie je ani rastúca ani klesajúca, nie je monotónna.

Prv než uvedieme vety o limitách monotónnych postupností potrebujeme definovať pojmy infimum a supremum postupnosti.

Definícia 2.5.2. Infimom (supremom) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame infimum (supremum) množiny členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme ho $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ($\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$).

Vzhľadom na vlastnosti infima a suprema množiny (axióma C_5 a veta 1.9.10) platí:

a) číslo a je supremom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak má vlastnosti:

- (i) pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a$;
- (ii) pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje člen postupnosti a_{n_0} taký, že $a - \varepsilon < a_{n_0}$,

b) číslo b je infimom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak má vlastnosti:

- 1. pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq b$;
- 2. pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje člen postupnosti a_{n_1} taký, že $a_{n_1} < b + \varepsilon$.

Veta 2.5.3. *Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca. Potom platí:*

- 1. ak nie je zhora ohraničená, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,
- 2. ak je zhora ohraničená, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Dôkaz. 1. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je zhora ohraničená, to znamená, že ku každému číslu A existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $a_{n_0} > A$. Keďže postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesá, tak pre všetky $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0}$ a teda $a_n > A$. To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

2. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená. To znamená, že je zhora ohraničená množina členov tejto postupnosti a podľa axiómy C_5 existuje supremum tejto množiny, označme ho a a podľa definície 2.5.2 $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ a má vlastnosti (i), (ii). Keďže postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, tak pre všetky $n \geq n_0$ je $a_n \geq a_{n_0}$. Z (i), (ii) potom vyplýva, že pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$ platí $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, t.j. $|a_n - a| < \varepsilon$ čo znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. $\square$

Analogicky sa dokáže veta

Veta 2.5.4. *Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. Potom platí:*

- 1. ak nie je zdola ohraničená, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$,
- 2. ak je zdola ohraničená, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Z týchto viet a vety 2.2.6 vyplýva veta

Veta 2.5.5. *Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.*

Význam týchto viet je v tom, že pomôžu rozhodnúť o konvergencii postupnosti, aj keď nepoznáme limitu tejto postupnosti. Vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, vety 2.5.3 až 2.5.5 ostávajú v platnosti aj pre postupnosti monotónne, počnúc niektorým členom.

Príklad 2.5.6. Dokážme, že postupnosť $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.

Riešenie. Ukážeme, že táto postupnosť je rastúca a ohraničená zhora. Použitím binomickej vety rozpíšeme n -tý člen

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

potom

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right). \quad (2.23)$$

Všetky členy v súčtoch (2.22) a (2.23) sú kladné, pričom každý sčítanec v súčte (2.23) je väčší ako odpovedajúci sčítanec v súčte (2.22), pretože

$$1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1} \quad \text{pre každé } m = 1, 2, \dots, n-1$$

a počet sčítancov vo výraze (2.23) je o jedno väčší ako vo výraze (2.22). Preto $a_n < a_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, t.j. postupnosť je rastúca. Okrem toho, keďže $0 < 1 - \frac{m}{n} < 1$ pre $m = 1, 2, \dots, n-1$, z rovnosti (2.22) dostaneme

$$a_n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

Pretože $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ pre $k \in \mathbb{N}$, použitím vzorca pre súčet geometrického radu dostaneme

$$a_n < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

odkiaľ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 3$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Keďže všetky sčítance vo výraze (2.22) sú kladné, dostaneme odhad

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

Ukázali sme, že postupnosť $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, ohraničená a na základe vety 2.5.3 existuje jej limita. Túto limitu označujeme písmenom e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad \square$$

Číslo e je iracionálne číslo, je základom prirodzeného logaritmu a má v matematike významnú úlohu. Jeho približná hodnota je $e \doteq 2,718281828459045$.

Príklad 2.5.7. Dokážme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Riešenie. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je rastúca a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$. Podľa vety 2.5.3 a definície suprema je $a_n < a_{n+1} \leq e$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Ak dokážeme, že postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, bude $e \leq b_{n+1} < b_n$, podľa vety 2.5.4 a definície infima. Máme teda dokázať, že $b_{n+1} < b_n$, t.j. $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$, pre každé $n \in \mathbb{N}$. Táto nerovnosť platí práve vtedy, ak platí

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}, \quad \text{t.j.} \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Upravme poslednú nerovnosť $\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}$, odkiaľ

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Pre $h > 0$, $k > 1$, k -celé číslo je $(1 + h)^k > 1 + kh$. Ľavá strana poslednej nerovnosti je väčšia než $1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$. Tým je posledná nerovnosť dokázaná, takže postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a teda platí $a_n < a_{n+1} \leq e \leq b_{n+1} < b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Cvičenie

1. Zostrojte postupnosť, ktorá nenadobúda ani $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, ani $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

2. Dokážte, že ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, potom postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nadobúda svoje infimum.
3. Dokážte, že konvergentná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nadobúda aspoň jedno z čísel $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, t.j. existuje index k taký, že $a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ alebo existuje index p taký, že $a_p = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.
4. Dokážte, že nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné.
 - a) $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2^n})$; b) $a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \dots + \frac{1}{5^n+2^n}$;
 - c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$; d) $a_1 = 0$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$.

2.6 Vybrané postupnosti

Keď v postupnosti vynecháme konečný počet členov nezmení sa konvergenca tejto postupnosti. Teraz nás bude zaujímať, čo sa stane s postupnosťou, ak v nej vynecháme nekonečný počet členov tak, aby ostal nekonečný počet členov postupnosti. Definujme presne tento proces výberu.

Definícia 2.6.1. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rastúca postupnosť prirodzených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ budeme nazývať **vybranou postupnosťou** z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocou postupnosti $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Príklad 2.6.2. a) Postupnosť $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$, postupnosť nepárnych čísel je vybraná postupnosť z postupnosti prirodzených čísel $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, ale postupnosť $\{3, 5, 1, 9, 1, \dots\}$ už nie je vybraná postupnosť z postupnosti všetkých prirodzených čísel. Vybraná postupnosť musí zachovať následnosť členov pôvodnej postupnosti, ako to plynie z definície.

b) Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{2k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom postupnosť $\{1\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Keďže vyberajúca postupnosť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť, tak platí $n_k \geq k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a preto $n_k \rightarrow \infty$ pre $k \rightarrow \infty$.

Veta 2.6.3. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnú alebo nevlastnú limitu, potom každá z nej vybraná postupnosť má tú istú limitu.

Dôkaz. 1. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Podľa definície 2.4.1 pre každé číslo A existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > A$. Nech $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná vyberajúca postupnosť. Vyberajúca postupnosť je rastúca a preto pre $k > n_0$, $k \in \mathbb{N}$ je $n_k \geq k > n_0$ a teda $a_{n_k} > A$ pre všetky $k > n_0$, čo znamená, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$.

2. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to znamená, že pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že

$$\text{pre všetky } n > n_0 \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon. \quad (2.24)$$

Nech $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná vyberajúca postupnosť, potom pre $k > n_0$, $k \in \mathbb{N}$ je $n_k > n_0$ a zo vzťahu (2.24) máme

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \text{pre všetky } k > n_0, \text{ čo znamená } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \quad \square$$

$\square$

Príklad 2.6.4. Dokážme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ neexistuje pre $a < -1$.

Riešenie. Ak by táto limita existovala, potom každá vybraná postupnosť musí mať tú istú limitu. Zoberme dve vyberajúce postupnosti $\{2k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{2k+1\}_{k=1}^{\infty}$.

Nech $n_k = 2k$, potom vybraná postupnosť $\{a^{2k}\}_{k=1}^{\infty} = \{(a^2)^k\}_{k=1}^{\infty}$, $a^2 > 1$ má nevlastnú limitu $+\infty$ (príklad 2.4.4).

Nech $n_k = 2k+1$, potom vybraná postupnosť $\{a^{2k+1}\}_{k=1}^{\infty} = \{a(a^2)^k\}_{k=1}^{\infty}$, má nevlastnú limitu $-\infty$ (lebo $a < 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{2k} = \infty$).

Keďže tieto vybrané postupnosti majú rôzne limity, limita postupnosti $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$, $a < -1$ neexistuje. $\square$

Príklad 2.6.5. Zistíme, či konverguje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná rekurentne

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right), \quad a > 0.$$

Riešenie. Pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ platí $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0$, odkiaľ dostaneme nerovnosť

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \geq \sqrt{a}.$$

Z tejto nerovnosti vyplýva, že $a_n \geq \sqrt{a}$ pre každé $n = 2, 3, \dots$, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená. Použitím tohto odhadu pre a_n vyšetříme monotónnosť zadanej postupnosti

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} (a_n + \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2} (a_n + a_n) = a_n$$

pre všetky $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Ukázali sme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, zdola ohraničená a teda na základe vety 2.5.4 existuje číslo $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ a podľa vety 2.6.3 aj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$. Vo vzťahu, ktorým je daná postupnosť, môžeme urobiť limitný prechod

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right), \text{ odkiaľ } \alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Riešením tejto rovnice dostaneme $\alpha = \pm\sqrt{a}$. Keďže pre všetky $n \geq 2$ je $a_n \geq \sqrt{a}$, na základe vety 2.3.5 dostávame $\alpha = \sqrt{a}$. $\square$

Dokázali sme už (veta 2.2.6, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená. Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená, ale nie je konvergentná. Dajú sa však z nej vybrať dve postupnosti $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^\infty = \{1\}_{k=1}^\infty$, $\{(-1)^{2k-1}\}_{k=1}^\infty = \{-1\}_{k=1}^\infty$, ktoré sú konvergentné. Vzniká otázka, či z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná postupnosť. K odpovedi na túto otázku potrebujeme nasledujúcu vetu.

Veta 2.6.6. [Cantorov princíp vložených intervalov]²

Nech pre intervaly $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle, \dots$ platí

$$\text{a) } \langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle \text{ pre } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.25)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0. \quad (2.26)$$

Potom existuje jediné číslo c také, že $c \in \langle a_n, b_n \rangle$ pre $n = 1, 2, 3, \dots$.

Dôkaz. a) Existencia čísla c . Z podmienky (2.25) vyplýva, že postupnosť ľavých koncových bodov intervalov $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesajúca, zhora ohraničená a podľa axiómy o supreme C_5 existuje $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = c$, pričom $a_n \leq c \leq b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

b) Jednoznačnosť. Nech existujú dve rôzne čísla c, c' , pre ktoré $c \in \langle a_n, b_n \rangle, c' \in \langle a_n, b_n \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže $c \neq c'$ je buď $c < c'$ alebo $c > c'$. Nech, napr. $c < c'$. Potom $a_n \leq c < c' \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, odkiaľ $b_n - a_n \geq c' - c = \alpha > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, čo je v spore s predpokladom (2.26). Teda $\alpha = 0$, t.j. $c' = c$. $\square$

Veta 2.6.7. [Bolzanova–Weierstrassova]³ Ak postupnosť je ohraničená, potom existuje z nej vybraná konvergentná postupnosť.

Dôkaz. Nech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená postupnosť. Potom všetky členy postupnosti patria nejakému intervalu, t.j. existujú čísla a, b také, že

$$a_n \in \langle a, b \rangle, \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

Zoberme interval $\langle a, b \rangle$ a rozdeľme ho bodom d na dve rovnaké časti. Potom aspoň jeden z intervalov $\langle a, d \rangle, \langle d, b \rangle$ obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Ak obidva

²Georg Cantor (1845–1918) – nemecký matematik, zakladateľ teórie množín

³Bernard Bolzano (1781–1848) – český matematik, filozof a logik.

Karol Theodor Weierstrass (1815–1897) – nemecký matematik, člen Berlínskej akadémie vied.

intervaly obsahujú nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zoberieme jeden z nich. Vybraný interval, ktorý obsahuje nekonečne veľa členov danej postupnosti označme $\langle a_1, b_1 \rangle$ a jeho dĺžka je rovná $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

Rozdeľme interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ na dve rovnaké časti a z dvoch vzniklých intervalov spôsobom opísaným vyššie vyberieme ten, ktorý obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označme ho $\langle a_2, b_2 \rangle$.

Pokračujúc v tomto procese dostaneme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n \rangle$ takých, že:

1. $\langle a_1, b_1 \rangle \supset \langle a_2, b_2 \rangle \supset \dots \supset \langle a_n, b_n \rangle \supset \dots$
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$.

Na základe vety 2.6.6 existuje jediný bod c taký, že $c \in \langle a_n, b_n \rangle$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Teraz ukážeme, že existuje vybraná postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá konverguje ku c . Keďže interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ obsahuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že $x_{n_1} \in \langle a_1, b_1 \rangle$. Interval $\langle a_2, b_2 \rangle$ obsahuje tiež nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, preto existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ také, že $x_{n_2} \in \langle a_2, b_2 \rangle$ a $n_2 > n_1$. Takto pokračujúc dostaneme, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ také, že $x_{n_k} \in \langle a_k, b_k \rangle$ a $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. To znamená, že existuje vybraná postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Body c, x_{n_k} patria intervalu $\langle a_k, b_k \rangle$, tak pre ich vzdialenosť platí

$$|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Postupnosť $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k nule a tak z poslednej nerovnosti dostávame, že $x_{n_k} \rightarrow c$ pre $k \rightarrow \infty$. $\square$

Pomocou definície neohraničenej postupnosti čitateľ ľahko sám dokáže vetu

Veta 2.6.8. *Z každej neohraničenej postupnosti sa dá vybrať postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu.*

Cvičenie

1. Zistite, či postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a nájdite jej limitu, ak:

a) $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$.

b) $a_n \leq qa_{n-1}, a_n > 0$ pre $n = 1, 2, 3, \dots, 0 < q < 1$.

$$c) \ a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n(2 - a_n), \ n = 1, 2, \dots, \ 0 < a < 1.$$

$$d) \ a_1 = a, \ a_{n+1} = 1 - a_n^2, \ n = 1, 2, 3, \dots, \ 0 < a < 1.$$

$$e) \ a_1 = a, \ a_2 = b, \ a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \ n = 3, 4, 5, \dots$$

2. Dokážte, že monotónna postupnosť je konvergentná, ak konverguje niektorá jej vybraná postupnosť.

2.7 Fundamentálne postupnosti

Definícia konvergentnej postupnosti je spojená s limitou tejto postupnosti, t.j. s číslom a ($= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$). Ukážeme, že o konvergencii postupnosti možno rozhodnúť aj bez udania čísla a .

Definícia 2.7.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **fundamentálnou** (alebo cauchyovskou), ak vyhovuje podmienke: pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre každé $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ a pre každé $m > n_0$, $m \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Veta 2.7.2. [Cauchyho⁴–Bolzanovo kritérium konvergenzie postupností]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, keď je fundamentálna.

Dôkaz. Nutná podmienka. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a . Na základe definície limity ku každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pre všetky } n > n_0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Odtiaľ pre $n > n_0$, $m > n_0$, $m \in \mathbb{N}$ dostaneme použitím vlastností absolútnych hodnôt

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ukázali sme, že pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n, m \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, $m > n_0$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$, t.j. že postupnosť je fundamentálna.

Postačujúca podmienka. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna. Ukážeme o nej, že je ohraničená. Zvoľme v definícii 2.7.1 $\varepsilon = 1$ a $m \in \mathbb{N}$, $m > n_0$. Potom pre takto zvolené m

$$|a_n| = |(a_n - a_m) + a_m| \leq |a_m| + |a_n - a_m| < |a_m| + 1 \quad \text{pre všetky } n > n_0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Položme $c = \max\{|a_1|, \dots, |a_{m-1}|, |a_m| + 1\}$. Potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq c$ čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Podľa vety 2.6.7 sa dá z nej vybrať

⁴Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – francúzsky matematik

konvergentná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nech $a_{n_k} \rightarrow a$ pre $k \rightarrow \infty$. Ukážeme, že číslo a je limitou pôvodnej postupnosti.

Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Keďže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_1, \forall m > n_1, m, n \in \mathbb{N} \implies |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.27)$$

Keďže $a_{n_k} \rightarrow a$ pre $k \rightarrow \infty$, k danému $\varepsilon > 0$

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \forall k > k_1, k \in \mathbb{N} \implies |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.28)$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_{k_1}\}$. Vo vzťahu (2.28) zoberme $n_k > n_0$ (také číslo vždy existuje pretože $n_k \rightarrow \infty$ pre $k \rightarrow \infty$). Potom pre $m = n_k$ a všetky $n > n_0$ zo vzťahu (2.27) dostaneme nerovnosť

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.29)$$

Z (2.28) a (2.29) vyplýva, že pre všetky $n > n_0$ platí

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

Príklad 2.7.3. Nech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť racionálnych čísel konvergujúca k α . Dokážme, že postupnosť $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.

Riešenie. Ukážme, že postupnosť $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna. Postupnosť $r_n \rightarrow \alpha$, $n \rightarrow \infty$. Podľa vety 2.2.6 je ohraničená, t.j.

$$\exists A \in \mathbb{Q} (A > 0) \forall n \in \mathbb{N} \implies -A \leq r_n \leq A.$$

Ak $a \geq 1$, potom $a^{-A} \leq a^{r_n} \leq a^A$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Ak $0 < a < 1$, potom $a^A \leq a^{r_n} \leq a^{-A}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

To znamená, že postupnosť $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, t.j.

$$\exists B > 0 (B \in \mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N} \implies |a^{r_n}| \leq B. \quad (2.30)$$

V príkladoch 2.3.2 a 2.3.8 sme ukázali, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1$ pre $a > 0$. To znamená na základe definície limity, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ aj $\varepsilon/B > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že platí

$$|a^{1/n_1} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}, \quad |a^{-1/n_1} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \quad (2.31)$$

$$\text{Ak } a \geq 1, \text{ tak platí } 1 - \frac{\varepsilon}{B} < a^{-1/n_1} \leq a^{1/n_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{B}. \quad (2.32)$$

Nech $z \in Q$ také, že $|z| < 1/n_1$. Potom z (2.32) dostaneme

$$1 - \frac{\varepsilon}{B} < a^{-1/n_1} \leq a^z \leq a^{1/n_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{B}$$

teda

$$|a^z - 1| < \frac{\varepsilon}{B} \quad \text{pre } |z| < 1/n_1, z \in Q. \quad (2.33)$$

Pre $0 < a < 1$ sa analogicky dokáže nerovnosť (2.33).

Keďže $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ je konvergentná, potom je fundamentálna a teda pre každé $\varepsilon > 0$, aj pre $\varepsilon = 1/n_1$, existuje číslo n_2 také, že pre všetky prirodzené čísla m, n , $m > n_2$, $n > n_2$ platí $|r_n - r_m| < 1/n_1$, čo znamená, že $r_n - r_m \in Q$ a spĺňa (2.33). Odhadnime teraz $|a^{r_n} - a^{r_m}|$ použitím (2.30) a (2.33)

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}| |a^{r_n - r_m} - 1| < B \cdot \frac{\varepsilon}{B} \quad \text{pre } n > n_2, m > n_2,$$

t.j. postupnosť $\{a^{r_n}\}_{n=1}^\infty$ je konvergentná podľa vety 2.7.2. □

Tento príklad by mohol byť definíciou mocniny s ľubovoľným reálnym exponentom. Vieme, že postupnosť $\{a^{r_n}\}_{n=1}^\infty$ je konvergentná, ak $r_n \rightarrow \alpha$ pre $n \rightarrow \infty$. Môžeme označiť limitu ako a^α , teda $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$, kde $r_n \in Q$, $r_n \rightarrow \alpha$ pre $n \rightarrow \infty$.

V prvej kapitole sme už definovali mocninu s reálnym exponentom (definícia 1.11.1). Vzhľadom na vetu 2.5.3 sú obidve definície pre $a > 1$ ekvivalentné, t.j. dávajú tú istú hodnotu a^α .

2.8 Hromadný bod postupnosti

S pojmi postupnosti a vybranej postupnosti úzko súvisí pojem hromadného bodu postupnosti.

Definícia 2.8.1. Bod $a \in \bar{R}$ nazývame **hromadným bodom** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, ak v ľubovoľnom ε -okolí bodu a leží nekonečne veľa členov danej postupnosti.

Príklad 2.8.2. Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$ má dva hromadné body 1, -1. Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí $|1 - (-1)^{2k}| = 0 < \varepsilon$ pre $k \in \mathbb{N}$ a $|-1 - (-1)^{2k-1}| = 0 < \varepsilon$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Nasledujúce vety dávajú do súvisu limitu postupnosti, limitu vybranej postupnosti a hromadné body postupnosti.

Veta 2.8.3. *Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu číslo a . Potom a je hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Dôkaz. Z definície limity máme, že pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, čo vlastne znamená, že v ľubovoľnom ε -okolí bodu a leží nekonečne veľa členov danej postupnosti, t.j. a je hromadným bodom tejto postupnosti. $\square$

Veta 2.8.4. *Bod a je hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď existuje z nej vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $a_{n_k} \rightarrow a$ pre $k \rightarrow \infty$.*

Dôkaz. Urobíme ho pre prípad $a \in \mathbb{R}$. Nech a je hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom v ľubovoľnom ε -okolí bodu a leží nekonečne veľa členov tejto postupnosti. Zoberme systém ε -okolí bodu a , kde ε bude postupne $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Pre $\varepsilon = 1$ nájdeme index n_1 taký, že $|a_{n_1} - a| < 1$,

pre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nájdeme index n_2 , $n_2 > n_1$ taký, že $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$.

Predpokladajme, že sme už skonštruovali $n_1, n_2, \dots, n_k$ tak, že

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k \quad a \quad |a_{n_i} - a| < \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Ukážeme, že môžeme nájsť index n_{k+1} tak, že

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} \quad a \quad |a_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}.$$

Je to možné, pretože k číslu $\frac{1}{k+1}$ existuje nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré ležia v $\frac{1}{k+1}$ -okolí bodu a . Máme skonštruovanú vybranú postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$, čo znamená, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Teraz dokážeme postačujúcu podmienku. Nech existuje vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z danej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje ku a . To znamená, že ak zvolíme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$, tak existuje číslo k_0 také, že pre všetky $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ platí $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, čo dokazuje, že a je hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Príklad 2.8.5. Nájdime hromadné body postupnosti $\{(-1)^n \frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešenie. Zoberme vybrané postupnosti

$$\left\{(-1)^{2k} \frac{2k+1}{2k+2}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{(-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)-1}{(2k-1)+2}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Prvá postupnosť konverguje ku 1, druhá ku -1 a tak podľa vety 2.8.4 sú body 1, -1 hromadné body danej postupnosti. Pretože $N = \{2k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1, k \in \mathbb{N}\}$, postupnosť nemá iné hromadné body. $\square$

Vieme, že nie každá postupnosť má limitu. Z viet 2.6.7, 2.6.8 a 2.8.4 však vyplýva, že každá postupnosť má aspoň jeden hromadný bod. To znamená, že množina hromadných bodov danej postupnosti je neprázdna a môže obsahovať aj prvky $+\infty$, resp. $-\infty$.

Definícia 2.8.6. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť.

1. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom supremum (infimum) množiny jej hromadných bodov nazývame **limes superior (limes inferior)** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$).
2. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená, kladieme $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
3. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola neohraničená, kladieme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Všimnime si, že zatiaľ čo postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemusí mať limitu, prvky $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ vždy existujú.

V prípade postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ neexistuje.

Veta 2.8.7. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu práve vtedy, ak $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. V tomto prípade platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Dôkaz. Nech existuje $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. V tomto prípade neexistuje okrem bodu a žiaden iný hromadný bod postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vyplýva to z vety 2.8.4 a 2.6.3. Množina hromadných bodov má teda jediný prvok a a odtiaľ vyplýva, že $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Obrátene, nech $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Máme dokázať, že a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pre jednoduchosť sa obmedzíme na prípad, že $a \in \mathbb{R}$. Ostatné prípady sa dokážu analogicky. Dôkaz urobíme nepriamo. Nech neplatí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, teda existuje číslo

$\varepsilon > 0$ také, že pre všetky čísla n_0 existuje prirodzené číslo $n > n_0$ také, že platí $|a_n - a| \geq \varepsilon$. Odtiaľ už ľahko dostaneme, že existuje vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Podľa vety 2.6.7 z postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ môžeme vybrať konvergentnú postupnosť $\{a_{n_{k_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty}$. Táto postupnosť je súčasne vybranou postupnosťou z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme $b = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{n_{k_\ell}}$. Podľa (2.34) máme $a_{n_{k_\ell}} \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, preto buď $b \leq a - \varepsilon$ alebo $b \geq a + \varepsilon$. Teda $b \neq a$. Bod b je však podľa vety 2.8.4 hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že množina hromadných bodov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje aspoň dva rôzne body a preto $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. To je spor a tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. $\square$

Veta 2.8.8. *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, H je množina hromadných bodov tejto postupnosti a $S = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Potom platí:*

1. $S \in H$.
2. Ak a je ľubovoľné reálne číslo také, že $a > S$ potom existuje také číslo n_0 , že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a$.
3. Bod S s vlastnosťami 1) a 2) je určený jednoznačne.

Dôkaz. 1.a) Nech $S = +\infty$, potom H je zhora neohraničená množina, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená a podľa viet 2.6.8 a 2.8.4 je $+\infty \in H$.

b) Nech $S \in \mathbb{R}$. Chceme ukázať, že existuje vybraná postupnosť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá konverguje ku S . Ak by to neplatilo, existoval by interval $(S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ (ε nejaké kladné číslo), v ktorom by sa nachádzal najviac konečný počet členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, a teda v tomto intervale by sa nenachádzal žiaden bod množiny H , čo je v spore s tým, že $S = \sup H$. Platí teda $S \in H$.

c) Nech $S = -\infty$. Potom H má jediný prvok a to bod $-\infty$, teda $-\infty \in H$. Tým je tvrdenie 1) dokázané.

2) Tvrdenie druhej časti dokážeme nepriamo. Nech existuje $a > S$ tak, že nerovnosť $a_n \geq a$ je splnená pre nekonečný počet indexov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom existuje hromadný bod b tejto postupnosti taký, že $b \geq a > S$. Platí teda $b \in H$, $b > S = \sup H$, čo je spor.

3) Nech existujú $p \neq q$, napr. $p < q$ majúce vlastnosti 1) a 2) vety. Zvoľme reálne číslo a také, že $p < a < q$. Podľa 2) existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < a$. Potom q nespĺňa podmienku 1), čo je spor. Platí teda $p = q$. Ukážeme ešte, že ak bod

p spĺňa podmienky 1) a 2) potom $p = \sup H$. Nech to neplatí. Nech $p \neq \sup H$ a spĺňa podmienky 1), 2), potom musí existovať $q = \sup H$ také, že q tiež spĺňa podmienky 1), 2). Dva rôzne body spĺňajúce podmienky 1), 2) však existovať nemôžu. $\square$

Cvičenie

1. Sformulujte a dokážte analogickú vetu k vete 2.8.8 pre $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Nech existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n > n_0$ platí $a_n \leq b_n$.

Potom $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dokážte.

3. Zostrojte príklad postupnosti, ktorá
 - a) má jeden hromadný bod a nie je konvergentná,
 - b) má konečný hromadný bod,
 - c) má hromadné body čísla $a_1, a_2, \dots, a_p$.
4. Nájdite limes inferior a limes superior nasledujúcich postupností:
 $a_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)$; $a_n = \cos \frac{n\pi}{3}$; $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$.

3 Funkcia reálnej premennej

3.1 Pojem funkcie

V každodennom živote, hlavne však pri skúmaní prírodných javov, procesov stretávame sa so závislosťou veľkosti niektorých veličín od iných. Napr. dráha s ubehnutá od začiatku voľného pádu za čas t je daná vzťahom $s = \frac{1}{2}gt^2$ (g – gravitačné zrýchlenie), plošný obsah kruhu závisí od polomeru kruhu r , $P = \pi r^2$.

Objektívne zákonitosti, ktoré existujú medzi veličinami, viedli prostredníctvom abstrakcie ku vzniku matematického pojmu reálna funkcia jednej reálnej premennej. Tento pojem, ako aj ostatné pojmy matematickej analýzy, prešiel svojim historickým vývojom. Prvé stopy nachádzame u Leibniza⁵, neskôr u Bernoulliiovcov⁶. Euler⁷ podal prvú presnejšiu definíciu pojmu funkcia. Definoval funkciu ako výraz vyjadrujúci istú závislosť medzi číslami. Túto formuláciu upresnil Dirichlet⁸, ktorý použil pri definícii funkcie pojem priradenie.

V súčasnej matematike pri zavádzaní pojmu funkcia vychádzame z pojmu množina.

Definícia 3.1.1. Nech sú dané dve množiny X, Y . Ak ku každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$ hovoríme, že na **množine X je definované zobrazenie**, čo zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

Množinu X nazývame **definičným oborom** zobrazenia f a označujeme ho $D(f)$ a jej prvky nazývame **argumentami, vzormi** alebo **nezávisle premennými**. Prvok $y_0 \in Y$, ktorý je priradený argumentu $x_0 \in X$, nazývame **hodnotou zobrazenia f v bode x_0** a označujeme ho $f(x_0)$ alebo $f(x)|_{x=x_0}$. Množinu všetkých hodnôt, ktoré sú priradené prvkom množiny X , nazývame **oborom hodnôt** zobrazenia f a označujeme ho $H(f)$. To znamená, že ak $y_0 \in H(f)$, potom existuje aspoň jeden prvok $x_0 \in D(f)$ taký, že $f(x_0) = y_0$. Prvky z oboru hodnôt často nazývame **obrazmi** alebo **závisle premennými**.

V definícii 3.1.1 môžu byť množiny X, Y akékoľvek. Ak sú množiny X, Y podmnožinami množiny $\mathbb{R}$, zobrazenie f nazývame **reálnou funkciou reálnej premennej**. V týchto

⁵Gotfreid Wilhelm Leibnitz (1646–1716) – nemecký matematik, fyzik. filozof.

⁶Johan Bernoulli (1667–1748) – vyštudoval medicínu. Od roku 1705 profesor matematiky na univerzite v Bazilei.

⁷Leonard Euler (1707–1783) – matematik, fyzik. Narodil sa vo Švajčiarsku, pôsobil v Petrohrade.

⁸Peter Gustáv L. Dirichlet (1805–1895) – nemecký matematik.

skriptách sa zatiaľ budeme zaoberať len týmto typom zobrazenia a preto ďalej namiesto „reálna funkcia reálnej premennej“ budeme stručne hovoriť len „funkcia“.

Funkciu budeme označovať symbolom f , φ , F , ..., ktorý určuje pravidlo priradenia. Pre označenie funkcie budeme tiež používať symboliku: $f : x \rightarrow f(x)$ (obrazom prvku x je prvok $f(x)$), $f : X \rightarrow Y$ (f označuje zobrazenie z množiny X do množiny Y). Určiť funkciu v zmysle definície znamená:

- a) zadať množinu X (definičný obor funkcie),
- b) zadať pravidlo priradenia.

Z toho vyplýva definícia rovnosti dvoch funkcií.

Definícia 3.1.2. Dve funkcie f , g sa rovnajú, ak majú ten istý definičný obor X a pre každé $x \in X$ platí rovnosť $f(x) = g(x)$.

Príklad 3.1.3. Funkcie $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \langle 0, \infty \rangle$, $g(x) = x$, $x \in \langle 0, \infty \rangle$ sa rovnajú. Ak zmeníme definičný obor týchto funkcií, tak funkcie $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ nie sú rovnaké. Pre $x \in (-\infty, 0)$ je $f(x) > 0$ a $g(x) < 0$. Ak zmeníme pravidlá priradenia $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ dostávame rovnaké funkcie.

Pravidlo priradenia môže byť dané rozmanitým spôsobom. Najčastejšie je dané pomocou formúl, vzorcov. Takýto spôsob zadania funkcie sa nazýva analytickým, napr. funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = x^2$ sú dané analyticky na množine $\mathbb{R}$.

Príklad 3.1.4. Funkciu, ktorá každému číslu $x \in \mathbb{R}$ priraduje to isté číslo $c \in \mathbb{R}$, nazývame **konštantnou funkciou** alebo konštantou, $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$.

Príklad 3.1.5. Priradíme každému $x \in \mathbb{R}$ najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x , $2 \rightarrow 2$, $\frac{3}{2} \rightarrow 1$, $-\frac{7}{2} \rightarrow -4$. Táto funkcia sa volá „celá časť x “ a označuje sa $E(x) = [x]$. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x - 1 < [x] \leq x$.

Príklad 3.1.6. Dirichletova funkcia $y = \chi(x)$ je definovaná na množine $\mathbb{R}$ týmto pravidlom priradenia

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \text{ je racionálne číslo,} \\ 0, & \text{ak } x \text{ je iracionálne číslo.} \end{cases}$$

Ak je funkcia f daná analyticky a nie je určený definičný obor $D(f)$, tak jej definičným oborom sa rozumie jej „prirodzený“ definičný obor, t.j. množina všetkých hodnôt argumentu, pre ktoré má vzorec (formula) zmysel. Napr. definičným oborom funkcie

$f(x) = \sqrt{x}$ je interval $\langle 0, \infty \rangle$, definičným oborom funkcie $h(x) = \frac{x}{x-1}$ sú všetky reálne čísla $x \neq 1$.

Poznamenajme, že funkcia môže byť zadaná rôznymi formulami na rôznych intervaloch. Napr. funkcia

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ak } x < 0, \\ x^2, & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - \sqrt{x}, & \text{ak } x > 1, \end{cases}$$

je zadaná analyticky na $\mathbb{R}$ pomocou troch rôznych formúl.

Často sa stáva, že danú funkciu vyšetrujeme nie na celom jej definičnom obore ale len na nejakej jeho podmnožine.

Definícia 3.1.7. Nech f je funkcia definovaná na množine M a $M_1 \subset M$. Potom funkciu φ , definovanú na množine M_1 tak, že $\varphi(x) = f(x)$ pre každé $x \in M_1$, nazývame **parciálnou funkciou** k funkcii f alebo tiež **zúžením** funkcie f na množine M_1 .

Napríklad parciálnou funkciou k funkcii $\chi(x)$ na množine $\mathbb{Q}$ je funkcia $\varphi(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$.

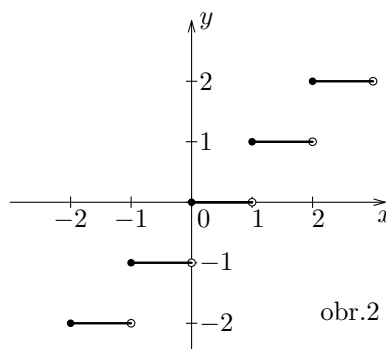
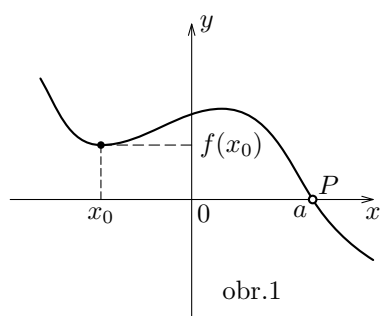
Poznámka. V kapitole 2 sme definovali postupnosť. Pomocou definície 3.1.1 môžeme definovať postupnosť ako funkciu, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel. To znamená, že n -tý člen postupnosti $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

S pojmom funkcia úzko súvisí pojem graf funkcie.

Definícia 3.1.8. Grafom funkcie f definovanej na množine X nazývame množinu

$$G = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

Ak máme v rovine zvolený pravouhlý súradnicový systém, môžeme znázorniť množinu G v tejto rovine. Toto znázornenie množiny G v tej rovine dáva istú množinu bodov v rovine. Aj túto množinu, t.j. zobrazenie bodov grafu G v rovine (geometrickú interpretáciu grafu G), nazývame grafom funkcie f . Množina G neobsahuje žiadne dve rôzne dvojice, ktorých prvá súradnica by bola rovnaká. Z toho vyplýva, že priamka $x = x_0$, $x_0 \in X$ pretne graf funkcie nakreslený v danej rovine s daným súradnicovým systémom v jednom bode $M = [x_0, f(x_0)]$. Hodnota $x = a$, pri ktorej $f(a) = 0$ sa nazýva **nulovým bodom** funkcie f . Ak $x = a$ je nulový bod funkcie f , tak graf funkcie f pretína os x v bode $P = [a, 0]$ (obr.1), alebo sa dotýka osi x v tomto bode.



Príklad 3.1.9. Nakreslime graf funkcie $E(x) = [x]$.

Riešenie. Ak $x \in \langle n, n+1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$, potom $E(x) = n$ (obr.2). □

Geometrické zobrazenie grafu funkcie, ktorej definičný obor je nekončená množina, nie je možné previesť bod po bode. Grafy funkcií je však možné zobrazovať na základe štúdia vlastností danej funkcie. Preto úlohu zostrojiť – nakresliť graf funkcie budeme riešiť postupne pri štúdiu vlastností funkcií.

Ak však poznáme graf nejakej funkcie $y = g(x)$, $x \in X$, jeho zobrazením môžeme dostať graf iných funkcií. Príklady takých zobrazení nám dáva nasledujúca tabuľka.

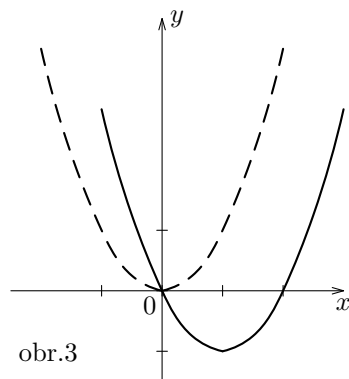
funkcia $y = f(x)$	zobrazenie grafu funkcie $y = g(x)$
$f(x) = g(x) + A$	posunutie pozdĺž y -ovej osi o A
$f(x) = g(x - a)$	posunutie pozdĺž x -ovej osi p a
$f(x) = g(-x)$	symetria vzhľadom na y -ovú os
$f(x) = -g(x)$	symetria vzhľadom na x -ovú os
$f(x) = Bg(x)$	násobenie každej y -ovej súradnice s B , $B \neq 0$
$f(x) = g(kx)$	násobenie každej x -ovej súradnice s k , $k \neq 0$

Príklad 3.1.10. Zostrojme graf funkcie:

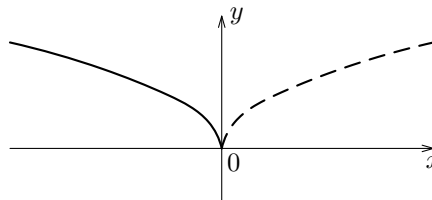
a) $y = x^2 - 2x$, b) $y = \sqrt{-x}$.

Riešenie. a) Upravme výraz $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$. Graf danej funkcie dostaneme z grafu funkcie $y = x^2$ posunutím pozdĺž osi x o 1 a pozdĺž osi y o (-1) (obr.3).

b) Graf tejto funkcie dostaneme z grafu funkcie $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ symetriou vzhľadom na os y (obr.4). □



obr.3



obr.4

3.2 Operácie s funkciami

Tak ako s číslami aj s funkciami môžeme prevádzať algebraické operácie a môžeme ich porovnávať.

Definícia 3.2.1. Nech f, g sú funkcie, ktorých definičné obory sú $D(f), D(g)$. Potom **súčet** $f + g$, **rozdiel** $f - g$, **súčin** $f \cdot g$ sú funkcie definované na množine $D(f) \cap D(g)$, pričom pre každé $x \in D(f) \cap D(g)$ platí $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. **Podiel** $\frac{f}{g}$ je funkcia definovaná na množine $D(f) \cap \{x \in D(g) : g(x) \neq 0\}$ a pre každé x z tejto množiny platí $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. **Absolútna hodnota** $|f|$ je funkcia definovaná na $D(f)$ a pre každé $x \in D(f)$ platí $|f|(x) = |f(x)|$.

Príklad 3.2.2. a) Funkciu, ktorú môžeme vyjadriť pomocou funkcie $f(x) = x$, a konečného počtu konštantných funkcií použitím operácií sčítania a násobenia, nazývame **mnohočlenom** (polynómom). Všeobecne zapisujeme mnohočlen v tvare

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú reálne čísla, $n \in \mathbb{N}$. Definičným oborom je interval $(-\infty, \infty)$.

b) Funkciu, ktorú môžeme vyjadriť ako podiel dvoch mnohočlenov $P(x), Q(x)$ nazývame **racionálnou funkciou**

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \dots + a_n}{b_0x^m + \dots + b_m}.$$

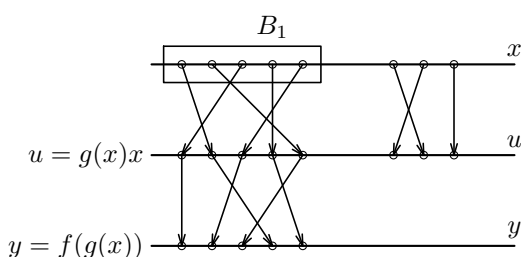
Definičným oborom je množina $R \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

Definícia 3.2.3. Nech funkcie f, g sú definované na množine A . Ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq g(x)$ [$f(x) < g(x), f(x) \geq g(x), f(x) > g(x)$] hovoríme, že na množine A

je funkcia f **menšia alebo rovná** funkcii g [funkcia f je **menšia ako** funkcia g , funkcia f je **väčšia alebo rovná** funkcii g , funkcia f je **väčšia ako** funkcia g] a píšeme $f \leq g$, [$f < g$, $f \geq g$, $f > g$].

Na rozdiel od reálnych čísel, nie všetky dvojice funkcií sa dajú porovnať. Napr. funkcie $f(x) = x$, $g(x) = -x$ na množine $\mathbb{R}$ nemožno porovnať.

Ďalšou operáciou, ktorú môžeme robiť s funkciami je „**skladanie**“ funkcií. Nech sú dané dve funkcie: $y = f(u)$ definovaná na množine A , $u = g(x)$ definovaná na množine B .



obr.5

Každý hodnote argumentu x funkcie g je priradená určitá číselná hodnota $u = g(x)$. Ak patrí $u = g(x)$ do definičného oboru funkcie f , postupným priradením $x \rightarrow u \rightarrow y$ je hodnote argumentu x priradená hodnota $y = f(u) = f(g(x))$. Hodnoty argumentu x , pre ktoré $g(x)$ patrí do definičného oboru funkcie f tvoria množinu

$B_1 \subset B$. Pre každé $x \in B_1$ má symbol $f(g(x))$ presný zmysel. Ak hodnota $u = g(x)$ nepatrí do definičného oboru funkcie f , potom symbol $f(g(x))$ nemá zmysel.

Definícia 3.2.4. Nech funkcia f je definovaná na množine A , funkcia g je definovaná na množine B . Funkciu s predpisom priradenia $f(g(x))$, ktorej definičným oborom je množina všetkých hodnôt $x \in B$, pre ktoré hodnota $u = g(x) \in A$, nazývame **zloženou funkciou**.

Príklad 3.2.5. a) Dané sú funkcie $g(x) = x^2 + 1 : \mathbb{R} \rightarrow \langle 1, \infty \rangle$ a $f(u) = \sqrt{u} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$. Keďže $\langle 1, \infty \rangle \subset \langle 0, \infty \rangle$ existuje zložená funkcia $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$, ktorej definičným oborom je $\mathbb{R}$.

b) Dané sú funkcie $g(x) = -x^2 - 1 : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, -1]$ a $f(u) = \sqrt{u} : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$. Keďže $(-\infty, -1] \not\subset \langle 0, \infty \rangle$ neexistuje zložená funkcia $f(g(x))$.

c) Funkcia $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$ je zloženou funkciou z funkcií $u = 4 - x^2$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$ a $y = \sqrt{u}$, $u \in \langle 0, \infty \rangle$.

Cvičenie

1. Určte definičný obor funkcií:

$$f(x) = \sqrt{5x + 3}, f(x) = \sqrt[6]{-x^2 + 2x - 1}, f(x) = 3x + \sqrt{1 - x}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}},$$

$$f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}, f(x) = \frac{x^5-1}{x^6-1}, f(x) = \frac{5x^2+2x-3}{2x^4-4x-3}.$$

2. Načrtnite grafy funkcií:

$$f(x) = [x^2]; f(x) = (-1)^{[x]}; f(x) = |x^2 - 2x|; f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0; f(x) = x + |x|.$$

3. Nájdite definičný obor a formulu, ktorou je daná zložená funkcia $f(g(x))$, ak f je daná:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = x^2 + 3x; & \text{b) } y = \frac{x}{5-x}; & \text{c) } y = \sqrt{x+1}; & \text{d) } y = |x+3| \text{ a } g \text{ je daná:} \\ \text{a) } \sqrt{x}; & \text{b) } \frac{2x}{1+x}; & \text{c) } y = [x]; & \text{d) } y = |x|. \end{array}$$

3.3 Niektoré špeciálne triedy funkcií

3.3.1 Ohraničené a neohraničené funkcie

Definícia 3.3.1. Funkcia f sa nazýva **ohraničenou zdola (zhora)** na množine $A \subset D(f)$, ak množina $\{y : y = f(x), x \in A\}$ je ohraničená zdola (zhora). Funkcia f sa nazýva **ohraničenou** na množine $A \subset D(f)$, ak je ohraničená zhora aj zdola.

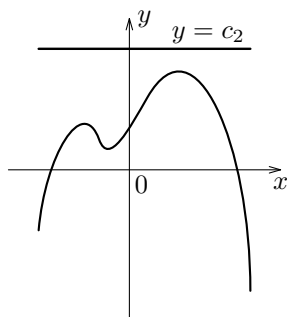
Vzhľadom na definíciu ohraničenej množiny, resp. ohraničenej množiny zhora (zdola) (definícia 1.9.1, 1.9.2) platí nasledujúca veta, ktorú čitateľ ľahko sám dokáže.

Veta 3.3.2. a) Funkcia f je ohraničená zdola (zhora) na množine $A \subset D(f)$ práve vtedy, ak existuje $c_1 \in \mathbb{R}$ ($c_2 \in \mathbb{R}$) také, že pre všetky $x \in A$ platí nerovnosť $f(x) \geq c_1$ ($f(x) \leq c_2$).

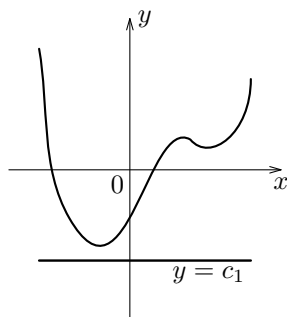
b) Funkcia f je ohraničená na množine $A \subset D(f)$ práve vtedy, keď existuje $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in A$ platí nerovnosť $|f(x)| \leq c$.

Ak tvrdenia vo vete 3.3.2 platia pre všetky $x \in D(f)$ hovoríme skrátene, že funkcia f je: a) ohraničená zdola (zhora);

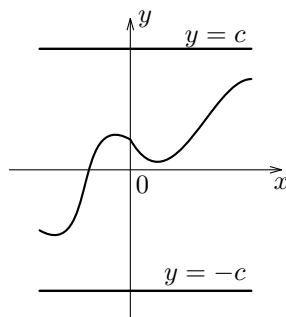
b) ohraničená.



obr.6



obr.7



obr.8

Geometrická interpretácia. Ak je funkcia f ohraničená zhora na množine A znamená, že graf funkcie leží pod nejakou priamkou $y = c_2$ (obr.6). Ak je funkcia f ohraničená zdola na množine A , graf funkcie leží nad priamkou $y = c_1$ (obr.7). Ak je funkcia f ohraničená na množine A jej graf leží v páse ohraňovanom priamkami $y = c$, $y = -c$ (obr.8).

Príklad 3.3.3. a) Funkcia $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ je ohraničená zdola na $\mathbb{R}$, pretože $x^2 \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

b) Funkcia $y = \frac{x^2}{x^2+5}$, $x \in \mathbb{R}$ je ohraničená zdola na $\mathbb{R}$, pretože $x^2 \geq 0$, $x^2 + 5 > 0$ a ich podiel $\frac{x^2}{x^2+5} \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Ďalej pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnosť $x^2 < x^2 + 5$, odkiaľ $\frac{x^2}{x^2+5} < 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. To znamená, že funkcia je ohraničená zhora na $\mathbb{R}$. Podľa definície 3.3.1 je potom daná funkcia ohraničená na $\mathbb{R}$.

c) Funkcia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nie je ohraničená. Máme ukázať, že pre každé číslo $c > 0$ existuje argument $x_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taký, že $f(x_c) > c$. Nech teda c je ľubovoľné kladné číslo a nech $x_c = \frac{1}{\sqrt{2c}}$. Potom $f(x_c) = 2c > c$.

Veta 3.3.4. Nech funkcie f , g sú ohraňované na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$. Potom aj funkcie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sú ohraňované na množine A .

Dôkaz. Podľa predpokladu sú funkcie f , g ohraňované na množine A , čo podľa vety 3.3.2 znamená, že existujú kladné čísla c_1 , c_2 také, že

$$|f(x)| \leq c_1, \quad |g(x)| \leq c_2 \quad \text{pre všetky } x \in A. \quad (3.1)$$

Položme $c = c_1 + c_2$. Použitím vzťahov (3.1) dostaneme

$$|(f \pm g)(x)| = |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq c_1 + c_2 = c, \quad \text{pre všetky } x \in A,$$

čo znamená, že funkcie $f + g$, $f - g$ sú ohraňované na množine A .

Podobne, ak položíme $c = c_1 \cdot c_2$, použitím vzťahov (3.1) dostaneme

$$|(fg)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \leq c_1 \cdot c_2 = c, \quad \text{pre všetky } x \in A$$

čo znamená, že funkcia $f \cdot g$ je ohraňovaná na množine A . □

Nech B je množina hodnôt, ktoré funkcia f nadobúda na množine $A \subset D(f)$. Potom supremum množiny B nazývame **supremom funkcie f** na množine A a označujeme $\sup_{x \in A} f(x)$, infimum množiny B nazývame **infimom funkcie f** na množine A a označujeme $\inf_{x \in A} f(x)$.

Nech existuje bod $x_0 \in A$ taký, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(x_0)$. Potom hovoríme, že funkcia f nadobúda v bode x_0 **najväčšiu hodnotu (maximum)** na množine A a píšeme $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$. Analogicky, ak existuje bod $x_1 \in A$ taký, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \geq f(x_1)$ hovoríme, že funkcia f nadobúda v bode x_1 **najmenšiu hodnotu (minimum)** na množine A a píšeme $f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$. Maximum a minimum funkcie nazývame **extrémami** tejto funkcie.

Príklad 3.3.5. Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{x^2+5}$, $x \in \mathbb{R}$ je ohraničená (príklad 3.3.3) má $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$. (Dokážte!) Pre $x = 0$ je $f(0) = 0$ a teda $0 = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Daná funkcia nemá maximum, pretože neexistuje bod $x_0 \in \mathbb{R}$ taký, že hodnota $f(x_0) = 1$.

3.3.2 Párne a nepárne funkcie

Definícia 3.3.6. Funkcia f definovaná na množine A sa nazýva:

a) **párna**, ak pre každé $x \in A$ platí $-x \in A$ a $f(-x) = f(x)$; (3.2)

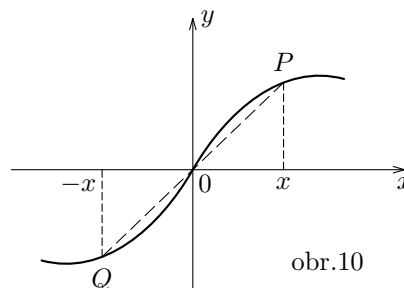
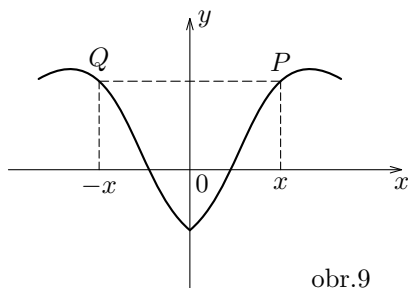
b) **nepárna**, ak pre každé $x \in A$ platí $-x \in A$ a $f(-x) = -f(x)$. (3.3)

Príklad 3.3.7. a) Funkcie $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ sú párne funkcie.

b) Funkcie $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $y = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$ sú nepárne funkcie.

c) Funkcia $y = x^2 + x + 1$ nie je ani párna ani nepárna.

Pri definícii párnej a nepárnej funkcie sme predpokladali, že ak je funkcia definovaná v nejakom bode x , je tiež definovaná v bode $-x$. Nemá preto zmysel hovoriť o párnosti a nepárnosti funkcie, ktorej množina bodov predstavujúcich na číselnej osi definičný obor, nie je symetrická vzhľadom na bod 0. Napr. u funkcie $y = \sqrt{x+1}$ nemá zmysel hovoriť o párnosti, resp. nepárnosti, lebo jej definičný obor je $\langle -1, \infty \rangle$



Geometrická interpretácia. Graf párnej funkcie je symetrický vzhľadom na os y , pretože ak bod $P = [x, f(x)]$ je bodom grafu funkcie, potom vzhľadom na (3.2) je bod

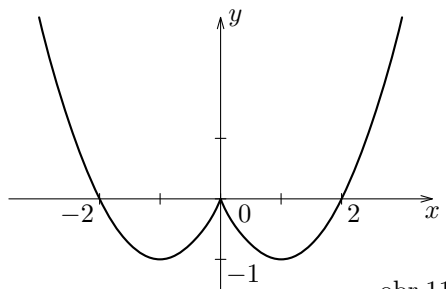
$Q = [-x, f(x)]$, ležiaci symetricky k bodu P vzhľadom na os y , tiež bodom grafu funkcie (obr.9). Graf nepárnej funkcie je symetrický vzhľadom na začiatok súradnicového systému, pretože body $P = [x, f(x)]$, $Q = [-x, -f(x)]$, symetrické vzhľadom na začiatok súradnicového systému, sú v dôsledku vzťahu (3.3) bodmi grafu funkcie (obr.10).

Ak máme zostrojiť graf párnej (nepárnej) funkcie stačí zostrojiť časť grafu pre $x \geq 0$ a potom ho symetricky zobrazit' vzhľadom na os y (na začiatok súradnicového systému).

Príklad 3.3.8. Zostrojme graf funkcie

$$f(x) = x^2 - 2|x|.$$

Pre $x \geq 0$ je $f(x) = x^2 - 2x$ a jej graf je časťou grafu na obr.3. Ľahko sa overí, že funkcia f je párna a tak jej graf pre $x < 0$ dostaneme symetrickým zobrazením vzhľadom na os y grafu funkcie $y = x^2 - 2x$, $x \geq 0$ (obr.11).

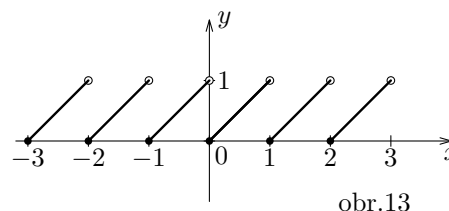
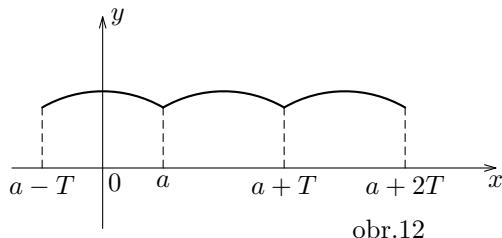


3.3.3 Periodické funkcie

Definícia 3.3.9. Funkciu f nazývame **periodickou**, ak existuje kladné číslo p také, že pre ľubovoľné $x \in D(f)$ aj $x + p \in D(f)$, $x - p \in D(f)$ a

$$f(x - p) = f(x) = f(x + p). \quad (3.4)$$

Najmenšie kladné číslo z tých p , pre ktoré platí (4) nazývame **periódou** funkcie f .



Poznamenajme, že ak f je periodická funkcia a p je také číslo, že platí (3.4), tak pre každé celé číslo k , ak $x + kp \in D(f)$ platí $f(x) = f(x + kp)$. Z toho potom vyplýva, že pre zostrojenie grafu periodickej funkcie stačí zostrojiť jej graf na niektorom z intervalov

$\langle a, a + T \rangle$, kde T je perióda, $a \in D(f)$. Zvyšok grafu dostaneme rovnobežným posunutím v smere osi x o násobok periódy T (obr.12).

Príklad 3.3.10. Funkcia $f(x) = x - [x]$ je periodická s periódou 1.

Riešenie. Najprv ukážeme, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x + 1] = [x] + 1$. Z nerovnosti $[x] \leq x < [x] + 1$ dostávame, že $[x] + 1 \leq x + 1 < ([x] + 1) + 1$. Keďže $[x] + 1$ je celé číslo a $[x + 1]$ je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $x + 1$, tak $[x + 1] = [x] + 1$.

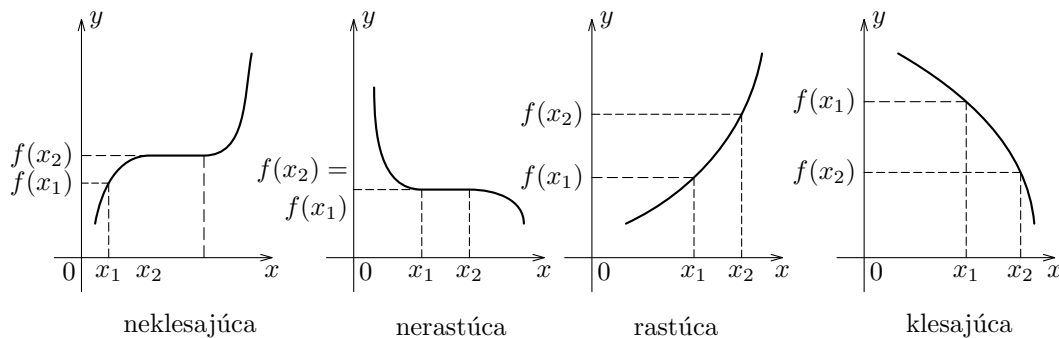
Pre každé $x \in \mathbb{R}$ aj $x + 1 \in \mathbb{R}$ a platí

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - ([x] + 1) = x - [x] = f(x),$$

to znamená, že funkcia f je periodická. Chceme ukázať teraz, že 1 je najmenšie číslo, pre ktoré platí (3.4). Nech to neplatí, nech existuje p , $0 < p < 1$, pre ktoré platí (3.4). Avšak pre každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je $f(x) = x$, preto $f(0) = 0 \neq f(0 + p) = p$, čo je spor. Tým sme dokázali, že číslo 1 je periódou danej funkcie (obr.13). $\square$

3.3.4 Monotónne funkcie

Definícia 3.3.11. Funkciu f nazývame **neklesajúcou (nerastúcou) na množine** $A \subset D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Funkciu f nazývame **rastúcou (klesajúcou) na množine** $A \subset D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) (obr.14).



obr.14

Ak $A = D(f)$, potom v definícii týchto pojmov pre skrátenie vyjadrenia vynechávame príslovkové určenie „na množine A “. Z definície je zrejmé, že každá rastúca funkcia je

neklesajúca a každá klesajúca funkcia je nerastúca. Ale nie každá neklesajúca funkcia je rastúca a nie každá nerastúca funkcia je klesajúca.

Funkcie neklesajúce a nerastúce na množine $A \subset D(f)$ nazývame **monotónne** na tejto množine. Funkcie rastúce a klesajúce na množine $A \subset D(f)$ nazývame **rýdzomonotónne** na tejto množine.

Príklad 3.3.12. Vyšetrite monotónnosť funkcie:

$$\text{a) } y = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \quad \text{b) } y = \frac{|x|}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Riešenie. a) Upravme výraz

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1}). \quad (3.5)$$

Ak $0 \leq x_1 < x_2$ sú obidva činitele v (3.5) kladné a preto $x_2^n > x_1^n$, čo znamená, že funkcia $y = x^n$ rastie na intervale $\langle 0, \infty \rangle$.

Ak $x_1 < x_2 \leq 0$, potom $0 \leq -x_2 < -x_1$, odkiaľ

$$0 \leq (-x_2)^n < (-x_1)^n. \quad (3.6)$$

Ak n je párne, nerovnosť (3.6) možno zapísať $x_2^n < x_1^n$, čo znamená, že funkcia $y = x^n$, n – párne prirodzené číslo, klesá na intervale $(-\infty, 0)$.

Ak n je nepárne, nerovnosť (3.6) možno zapísať $-x_2^n < -x_1^n$, odkiaľ $x_2^n > x_1^n$, čo znamená, že funkcia $y = x^n$, n – nepárne prirodzené číslo, rastie na intervale $(-\infty, 0)$.

Nakoniec, ak $x_1 < 0 < x_2$, potom pre n – nepárne $x_1^n < 0 < x_2^n$, čo znamená, že funkcia $y = x^n$, n – nepárne prirodzené číslo, rastie na celom $\mathbb{R}$.

b) Funkcia $y = \frac{|x|}{x}$ je na intervale $(0, \infty)$ konštantná, $y = 1$ a na intervale $(-\infty, 0)$ je tiež konštantná, $y = -1$. To znamená, že funkcia $y = \frac{|x|}{x}$ je neklesajúca na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Nasledujúca veta dáva do súvisu ohraničenosť a monotónnosť funkcie.

Veta 3.3.13. Monotónna funkcia na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ je na tomto intervale ohraničená.

Dôkaz. Monotónna funkcia je buď neklesajúca alebo nerastúca. Nech f je neklesajúca na $\langle a, b \rangle$. Potom pre každé x , $a \leq x \leq b$ platí $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, odkiaľ vyplýva, že funkcia f je ohraničená na $\langle a, b \rangle$.

Analogicky sa urobí dôkaz, ak funkcia f je nerastúca na $\langle a, b \rangle$. $\square$

Dôležitú úlohu v tejto vete zohrala podmienka uzavretosti intervalu $\langle a, b \rangle$. Pre otvorený interval takáto veta neplatí. Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je klesajúca na intervale $(0, 1)$ a nie je ohraničená na tomto intervale.

3.3.5 Prosté funkcie

Definícia 3.3.14. Funkciu f nazývame **prostou** na množine $A \subset D(f)$, ak pre ľubovoľné dva body $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Príklad 3.3.15. Funkcia $f(x) = x^2$ je prostá na intervale $\langle 0, \infty \rangle$, ale nie je prostá na intervale $(-\infty, \infty)$, pretože existujú body, napr. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_1 \neq x_2$ a $f(-2) = f(2)$.

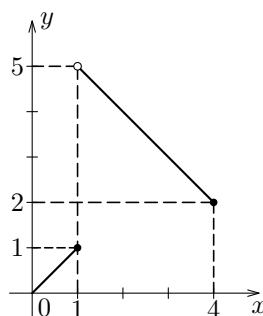
Veta 3.3.16. *Nech funkcia f je rýdzomonotónna na množine $A \subset D(f)$. Potom je f prostá na množine A .*

Dôkaz. Ak funkcia f je rýdzomonotónna na množine A , tak je buď rastúca alebo klesajúca na A . Nech f je rastúca na A . Potom z nerovnosti $x_1 < x_2$ vyplýva, že $f(x_1) < f(x_2)$, t.j. obrazy rôznych hodnôt argumentu sú rôzne, čo znamená, že funkcia f je prostá na A . Analogicky to platí, ak f je klesajúca na A . $\square$

Nasledujúci príklad ukazuje, že obrátená veta k vete 3.3.16 neplatí.

Príklad 3.3.17. Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 6 - x, & x \in (1, 4). \end{cases}$$



obr.15

je prostá na intervale $\langle 0, 4 \rangle$, ale nie je rýdzomonotónna na tomto intervale (obr.15).

Aby sme mohli vysloviť obrátenú vetu k vete 3.3.16 potrebujeme ďalšiu vlastnosť funkcie a to spojitosť. Spojité funkcie tvoria špeciálnu triedu funkcií, s ktorými sa budeme zaoberať neskôr.

Cvičenie

1. Rozhodnite, či sú funkcie na daných množinách ohraničené, ak:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x}, x \in (0, 1); \quad f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}, x \in (-1, 1).$$

2. Rozhodnite, na ktorých intervaloch sú dané funkcie rastúce a na ktorých sú klesajúce, ak: $f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = |x|$; $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
3. Zistite, či sú nasledujúce funkcie periodické a nájdite ich periódu: $f(x) = (-1)^{[x]}$; $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$; Dirichletova funkcia; $f(x) = \frac{2^{[x]} + (-2)^{[x]}}{2^{[x]}}$.
4. Zistite, či funkcie $f(x) = x^2 + |3x|$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(x) = [x]$, $f(x) = x^3 + 5x$, $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ sú párne alebo nepárne.
5. Vyslovte a dokážte tvrdenie, kedy z monotónnosti funkcií f , g na množine A vyplýva monotónnosť funkcií $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, cf , $c \in \mathbb{R}$.
6. Nech f_1, f_2 sú párne funkcie na $\mathbb{R}$, g_1, g_2 nepárne funkcie na $\mathbb{R}$. Rozhodnite, ktorá z uvedených funkcií je párna, resp. nepárna: $f_1 + f_2$, $g_1 + g_2$, $f_1 \cdot f_2$, $g_1 \cdot g_2$, $f_1 + g_1$, $f_1 \cdot g_1$.
7. Nájdite funkciu definovanú na $\mathbb{R}$, ktorá je prostá na $\mathbb{R}$ a nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$.
8. Nech f je definovaná na $\mathbb{R}$ a jej obor hodnôt nie je jednobodová množina. Potom existuje $a > 0$ také, že a nie je periódou funkcie f . Dokážte!
9. Nájdite funkciu f rastúcu na intervale I , funkciu g klesajúcu na intervale I tak, aby funkcia $f+g$ bola rastúca.
10. Nájdite príklady rýdzomonotónnych funkcií f, g na intervale I , pre ktoré funkcia $f+g$ nie je rýdzomonotónna.
11. Nech M_1, M_2 sú neprázdne množiny. Nech funkcia f je ohraničená na $M_1 \cup M_2$. Potom
- $$\sup_{x \in M_1 \cup M_2} f(x) = \max\left(\sup_{x \in M_1} f(x), \sup_{x \in M_2} f(x)\right). \text{ Dokážte!}$$
12. Nech f, g sú zhora ohraničené funkcie na $\mathbb{R}$. Potom je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x).$$

Dokážte!

3.4 Inverzná funkcia

Nech je daná funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Potom každému číslu $x_0 \in D(f)$ odpovedá jediné číslo $y_0 = f(x_0) \in H(f)$. Často sa vyskytuje úloha na základe danej funkčnej hodnoty y_0 nájsť odpovedajúcu hodnotu argumentu x_0 , t.j. riešiť vzhľadom na x rovnicu

$$f(x) = y_0, \quad y_0 \in H(f). \quad (3.7)$$

Táto rovnica môže mať jedno, ale aj niekoľko riešení. V grafickej interpretácii riešeniami rovnice (3.7) sú x -ové súradnice bodov, v ktorých priamka $y = y_0$ pretína graf funkcie $y = f(x)$. Napr. ak $f(x) = x^2$, potom rovnica

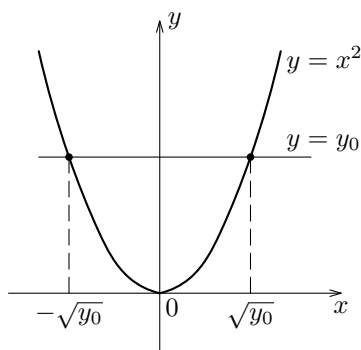
$$x^2 = y_0, \quad y_0 > 0$$

má dve riešenia $x_0 = \sqrt{y_0}$, $x_0 = -\sqrt{y_0}$ (obr.16).

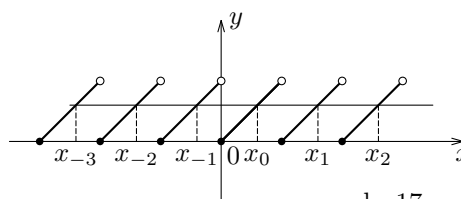
Ak $f(x) = x - [x]$, potom rovnica

$$x - [x] = y_0, \quad 0 \leq y_0 < 1$$

má nekonečne veľa riešení tvaru $x_k = x_0 + k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a x_0 je jedno z riešení tejto rovnice (obr.17).



obr.16



obr.17

Existujú funkcie, pre ktoré rovnica (3.7) má pre každé $y_0 \in H(f)$ jediné riešenie $x_0 \in D(f)$. Takúto vlastnosť majú prosté funkcie a pre tieto môžeme definovať inverznú funkciu.

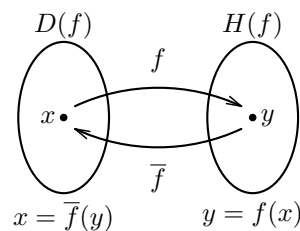
Definícia 3.4.1. Nech funkcia f je prostá s definičným oborom $D(f)$, oborom hodnôt $H(f)$. **Inverznou funkciou** k funkcii f nazývame funkciu $\bar{f}$ definovanú na množine $H(f)$, ktorá každému $y \in H(f)$ priradí číslo $x \in D(f)$ také, v ktorom hodnota funkcie f sa rovná y , t.j. $y = f(x)$ (obr.18).

Nasledujúca veta popisuje vzťah medzi f a $\bar{f}$.

Veta 3.4.2. *Nech funkcia f je prostá s definičným oborom $D(f)$ a oborom hodnôt $H(f)$. Nech $\bar{f}$ je inverzná funkcia k funkcii f . Potom*

$$\text{pre každé } x \in D(f) \text{ platí } \bar{f}(f(x)) = x \quad (3.8)$$

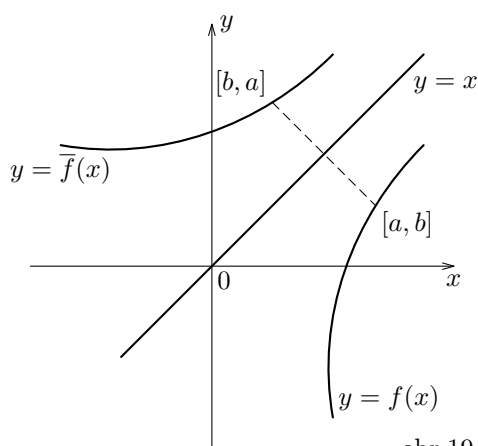
$$\text{a pre každé } y \in H(f) \text{ platí } f(\bar{f}(y)) = y. \quad (3.9)$$



obr.18

Dôkaz. Nech $x \in D(f)$, potom existuje $z \in H(f)$ také, že $z = f(x)$. Pre inverznú funkciu platí $x = \bar{f}(z)$ a teda $x = \bar{f}(f(x))$.

Teraz nech $y \in H(f)$, potom existuje $u \in D(f)$ také, že $f(u) = y$. Pre inverznú funkciu platí $u = \bar{f}(y)$ a teda $f(\bar{f}(y)) = y$. $\square$



obr.19

Geometrická interpretácia. Nech f je funkcia, ku ktorej existuje inverzná funkcia. Ak bod $[a, b]$ leží na grafe funkcie f , leží bod $[b, a]$ na grafe funkcie $\bar{f}$. Z toho vyplýva, že graf funkcie $\bar{f}$ je symetrický s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$ (obr.19). Ak je funkcia f daná analyticky, inverznú funkciu k nej nájdeme riešením rovnice

$$f(\bar{f}(x)) = x.$$

Obvykle označujeme nezávisle premennú x a závisle premennú y , preto aj v prípade inverznej funkcie budeme písať $y = \bar{f}(x)$ namiesto $x = \bar{f}(y)$.

Zo vzťahov (3.8) a (3.9) vyplýva, že vzťah „byť inverzný“ je vzájomný. To znamená, že ak funkcia f je inverzná k funkcii g , je tiež funkcia g inverzná k funkcii f .

Príklad 3.4.3. Nájdime inverznú funkciu k funkcii:

$$\text{a) } f(x) = 2x - 3, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{2x + 1}.$$

Riešenie. a) Funkcia $f(x) = 2x - 3$ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je prostá. Preto existuje k nej inverzná funkcia, ktorá je definovaná na $\mathbb{R}$ a jej analytické vyjadrenie nájdeme riešením rovnice

$$f(\bar{f}(x)) = 2\bar{f}(x) - 3 = x, \text{ t.j. } \bar{f}(x) = \frac{x+3}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Funkcia $f(x) = \sqrt{2x+1} : \langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$. Je prostá funkcia, existuje k nej inverzná funkcia, ktorá zobrazuje interval $\langle 0, \infty \rangle$ na interval $\langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle$ a jej analytické vyjadrenie nájdeme riešením rovnice

$$\begin{aligned}\sqrt{2\bar{f}(x)+1} &= x \\ \bar{f}(x) &= \frac{x^2-1}{2}, \quad x \in \langle 0, \infty \rangle.\end{aligned}$$

□

Nasledujúce vety popisujú niektoré vlastnosti inverznej funkcie $\bar{f}$, ak poznáme vlastnosti danej funkcie f .

Veta 3.4.4. *Ak je funkcia f rastúca (klesajúca), potom k nej existuje inverzná funkcia $\bar{f}$, ktorá je rastúca (klesajúca).*

Dôkaz. Urobíme ho pre prípad rastúcej funkcie. Analogicky sa dokáže veta v prípade klesajúcej funkcie. Nech f je rastúca funkcia s definičným oborom $D(f)$, oborom hodnôt $H(f)$. Podľa vety 3.3.16 je f prostá a preto k nej existuje inverzná funkcia $\bar{f} : H(f) \rightarrow D(f)$. Nech $y_1, y_2 \in H(f)$ a $y_1 < y_2$ sú dve ľubovoľné hodnoty argumentu funkcie $\bar{f}$. Ak $x_1 = \bar{f}(y_1)$, $x_2 = \bar{f}(y_2)$, potom $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ a $f(x_1) < f(x_2)$. Posledná nerovnosť v dôsledku rastúcnosti funkcie f je možná len vtedy, ak $x_1 < x_2$, t.j. $\bar{f}(y_1) < \bar{f}(y_2)$. To znamená, že inverzná funkcia $\bar{f}$ je rastúca. □

Dôkaz ďalšej vety prenechávame čitateľovi.

Veta 3.4.5. *Ak f je nepárna, prostá funkcia, inverzná funkcia $\bar{f}$ je tiež nepárna.*

Príklad 3.4.6. Vyšetrite vlastnosti inverznej funkcie k funkcii $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie. Z riešenia príkladu 3.3.12 vieme, že funkcia $f(x) = x^n$ je rýdzomonotónna, pre n - párne na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ a to rastúca, pre n - nepárne je na celom $\mathbb{R}$ rastúca. Preto, ak n je párne, existuje k funkcii $f(x) = x^n$ inverzná funkcia $\bar{f}(x) = \sqrt[n]{x}$, definovaná na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ a rastúca na tomto intervale.

Ak n je nepárne, existuje inverzná funkcia $\bar{f}(x) = \sqrt[n]{x}$ definovaná a rastúca na celom $\mathbb{R}$.

□

Cvičenie

1. Nájdite inverznú funkciu k funkcii:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; b) $f(x) = x^2 + 4$; c) $f(x) = x^2 + x + 7$;

d) $y = \frac{3+\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$; e) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 1 \\ x^2, & \text{pre } 1 \leq x \leq 4. \\ 2^x, & \text{pre } x > 4 \end{cases}$

2. Ukážte, že každá z nasledujúcich funkcií je inverzná sama k sebe: a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; c) $f(x) = \frac{ax+b}{x-a}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3.5 Limita funkcie

V matematickej analýze hrá pojem limity veľkú úlohu. Pomocou neho sa definujú pojmy ako spojitosť, derivácia. Pojem limity je spojený so správaním sa funkcie v okolí daného bodu.

Nech f je funkcia definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu a . Myšlienku „ $f(x)$ sa blíži k b , ak x sa blíži k a “ alebo „ $f(x)$ je blízko b , pokiaľ x je blízko a “ presne vystihuje tvrdenie „ b je limitou funkcie f v bode a “. Čo to znamená?

Definícia 3.5.1. [Cauchyho definícia limity] Číslo b nazývame **limitou funkcie f v bode a** , ak funkcia f je definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu a a pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$, pre ktoré $0 < |x - a| < \delta$, platí nerovnosť $|f(x) - b| < \varepsilon$, čo zapisujeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ alebo $f(x) \rightarrow b$ pre $x \rightarrow a$.

Poznámka. Pomocou logických symbolov môžeme definíciu limity funkcie f v bode a zapísať

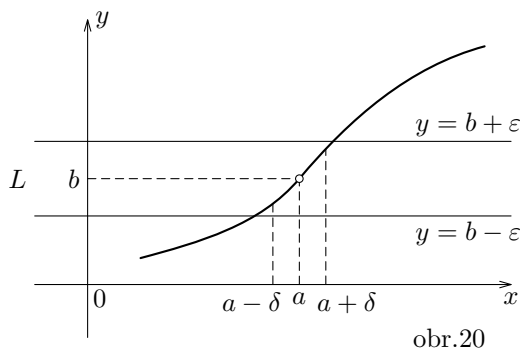
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \quad (3.10)$$

alebo pomocou okolí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in O_\delta^*(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b). \quad (3.11)$$

Geometrická interpretácia. Uvažujme pás L ohraňovaný priamkami $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$. Splnenie nerovností

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon, \quad a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a$$



obr.20

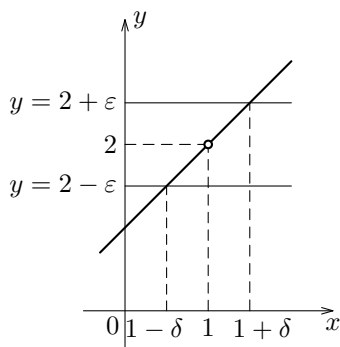
znamená, že body $[x, f(x)]$ grafu funkcie f (okrem bodu $[a, f(a)]$) ležia vo vnútri pásu L , ak hodnoty argumentu ležia v intervale $(a - \delta, a + \delta)$.

Je zrejmé, že v definícii limity sa stačí obmedzovať na „malé“ okolia bodu b , t.j. malé čísla $\varepsilon > 0$. Pretože, ak zaručíme, že platí $f(x) \in O_\varepsilon(b)$, potom pre $\varepsilon_1 > \varepsilon$ je $f(x) \in O_{\varepsilon_1}(b)$, lebo $O_\varepsilon(b) \subset O_{\varepsilon_1}(b)$.

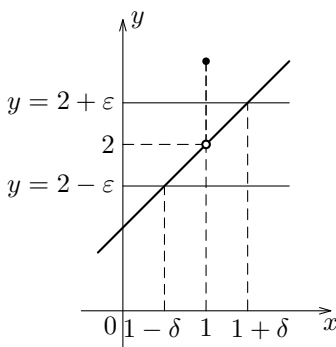
Všimnime si ďalej, že v definícii limity sa nevyžaduje, aby funkcia f bola definovaná v bode a . Hodnota funkcie f v bode a , pokiaľ existuje, nemá s vyšetrovanou otázkou nič spoločné. Uvedieme jednoduché príklady, ktoré to objasňujú.

Príklad 3.5.2. a) Funkcia $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ nie je definovaná v bode $x = 1$. Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

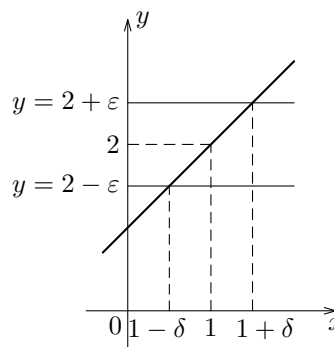
Nech je dané nejaké číslo $\varepsilon > 0$. Potrebujeme nájsť interval $(1 - \delta, 1 + \delta)$, to znamená nájsť číslo $\delta > 0$ také, aby pre všetky $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, $x \neq 1$ bolo $f(x) \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$. Keďže $x \neq 1$ platí $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ a $|f(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$. Môžeme zvoliť $\delta = \varepsilon$. Potom, ak $0 < |x - 1| < \delta$, platí $|f(x) - 2| < \varepsilon$ (obr.21).



obr.21



obr.22



obr.23

b) Funkcia

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1, \\ 3 & \text{pre } x = 1, \end{cases}$$

je definovaná na $\mathbb{R}$. Podobne ako v príklade a) sa ukáže, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |g(x) - 2| = |x + 1 - 2| < \varepsilon.$$

To znamená, že $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ bez ohľadu na to, že hodnota $g(1) = 3$ (obr.22).

Ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq 3$. Zoberme napr. $\varepsilon = \frac{3}{4}$, potom pre všetky čísla $\delta > 0$ existuje x_δ : $0 < |x_\delta - 1| < \min\{\delta, \frac{1}{8}\}$ také, že

$$|g(x_\delta) - 3| = |x_\delta + 1 - 3| = |x_\delta - 1 - 1| > 1 - |x_\delta - 1| > 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} > \frac{3}{4} = \varepsilon.$$

c) Funkcia $h(x) = x + 1$ je definovaná na celom $\mathbb{R}$ a hodnota $h(1) = 2$. Jej limita $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ (obr.23), pretože

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |h(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon.$$

Príklad 3.5.3. Dokážme, že:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a \in (0, \infty); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \neq 1.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \text{ ak } f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

Riešenie. a) Nech je dané ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Ak zvolíme $\delta = \sqrt{a}\varepsilon > 0$, potom pre každé $x : 0 < |x - a| < \delta = \sqrt{a}\varepsilon$ platí

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

b) Nech je dané ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Potrebujeme nájsť číslo $\delta > 0$ tak, aby pre všetky x : $0 < |x - 1| < \delta$ platilo $\left| \frac{x^3-1}{x-1} - 3 \right| < \varepsilon$. Pretože $x \neq 1$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3-1}{x-1} - 3 \right| &= |x^2 + x + 1 - 3| = |x^2 + x - 2| = |(x^2 - 1) + (x - 1)| \leq \\ &\leq |x - 1||x + 1| + |x - 1|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ak zoberieme $0 < \delta < 1$, potom pre každé x : $0 < |x - 1| < \delta$ platí $0 < x + 1 < 3$. Zo vzťahu (3.12) dostaneme

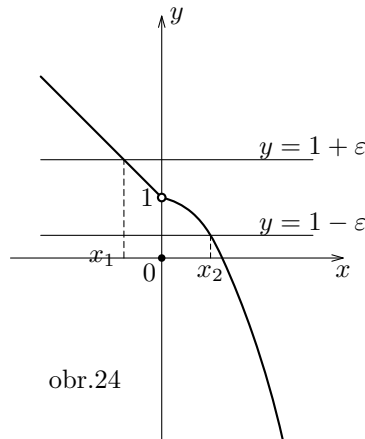
$$\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < 3\delta + \delta = 4\delta = \varepsilon.$$

Ak položíme $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$, potom ak $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$, $x \neq 1$, je $\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$, čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

c) Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Grafy priamok $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 - \varepsilon$ pretínajú graf funkcie v bodoch, ktorých súradnice sú $x_1 = -\varepsilon$, $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$ (obr.24). Dostaneme ich ako riešenia rovníc $f(x) = 1 + \varepsilon$, t.j. $1 - x = 1 + \varepsilon$, $x < 0$ a $f(x) = 1 - \varepsilon$, t.j. $1 - x^2 = 1 - \varepsilon$, $x > 0$. Nech $\delta = \min\{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\}$. Potom ak $0 < |x| < \delta$ je

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} |1 - x - 1| = |x| < \delta & (\text{pre } x < 0) \\ |1 - x^2 - 1| = |x^2| < \delta^2 & (\text{pre } x > 0) \end{cases} < \varepsilon.$$

To znamená, že $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.



d) Existuje $\varepsilon > 0$, napr. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ také, že pre všetky $\delta > 0$ existuje $x_\delta \in (-\delta^*, \delta^*)$, kde $\delta^* = \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$ také, že

$$|x_\delta^2 - 1| \geq 1 - x_\delta^2 > 1 - (\delta^*)^2 > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

□

Limita funkcie sa dá definovať aj pomocou postupností.

Definícia 3.5.4. [Heineho⁹ definícia limity] Číslo b sa nazýva **limitou funkcie f v bode a** , ak je táto funkcia definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu a , t.j. existuje $\delta_0 > 0$ také, že $O_{\delta_0}^*(a) \subset D(f)$ a pre ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in D(f)$ konvergujúcu k a , postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konverguje k číslu b .

Príklad 3.5.5. Dokážme, že funkcia $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ nemá limitu v bode $x = 0$.

Riešenie. Na základe definície 3.5.4 stačí ukázať, že existujú postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, ktoré konvergujú k nule a také, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

Zoberme $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, $f(x_n) = n - [n] = 0$, $f(y_n) = n + \frac{1}{2} - \left[n + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$. $\square$

Vzniká otázka, či obidve definície limity určujú to isté číslo. Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta 3.5.6. *Cauchyho a Heineho definície limity funkcie sú ekvivalentné.*

Dôkaz. V obidvoch definíciách sa predpokladá, že funkcia f je definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu a , t.j. existuje číslo $\delta_0 > 0$ také, že $O_{\delta_0}^*(a) \subset D(f)$.

a) Nech číslo b je limitou funkcie f v bode a v zmysle Cauchyho definície, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \delta_0) \forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Zoberme ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergujúcu ku a . Potom, vzhľadom na definíciu limity postupnosti, pre číslo $\delta > 0$ nájdené v (13) môžeme nájsť číslo n_0 také, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta,$$

odkiaľ, vzhľadom na (3.13) vyplýva, že $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Dokázali sme teda, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon, \quad (3.14)$$

pričom podmienka (3.14) platí pre ľubovoľnú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ takú, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. To znamená, že číslo b je limitou funkcie f v bode a v zmysle Heineho definície limity.

⁹Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – nemecký matematik, člen Pruskej a Göttingenskej akadémie vied.

b) Dokážeme, že ak číslo b je limitou funkcie f v bode a v zmysle Heineho definície, tak toto číslo b je limitou funkcie f v bode a v zmysle Cauchyho definície, t.j. platí (3.13). Predpokladajme, že to neplatí. Potom

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta \in (0, \delta_0) \exists x_\delta \in O_\delta^*(a) : |f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon_0. \quad (3.15)$$

Vzhľadom na (3.15) môžeme za δ zobrať ľubovoľné číslo z intervalu $(0, \delta_0)$. Zoberme $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ a označme $x_\delta = x_n$. Potom na základe (3.15) pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ platia nerovnosti

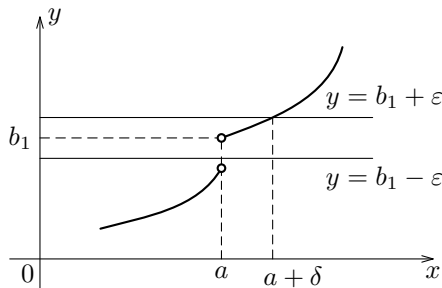
$$0 < |x_n - a| < \frac{\delta_0}{n}, \quad (3.16)$$

$$|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0. \quad (3.17)$$

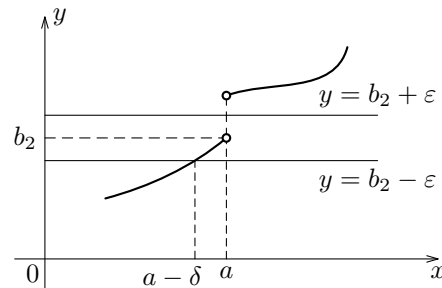
Zo (3.16) vyplýva, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Vzhľadom na to zo (3.17) dostávame, že číslo b nemôže byť limitou postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$. To znamená, že číslo b nie je limitou funkcie f v bode a v zmysle Heineho definície. Získaný spor dokazuje, že musí platiť tvrdenie (3.13). $\square$

Ak v definícii limity nahradíme prstencové δ -okolie bodu a len jednostranným δ -okolím, t.j. množinou $\{x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta\}$, resp. $\{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a\}$ dostaneme definície jednostranných limit.

Definícia 3.5.7. Číslo b_1 (b_2) nazývame **limitou sprava (zľava) funkcie f v bode a** a označujeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$), ak pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in (a, a + \delta) \cap D(f)$ ($x \in (a - \delta, a) \cap D(f)$) platí nerovnosť $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ ($|f(x) - b_2| < \varepsilon$) (obr.25a (b)).



obr.25a



obr.25b

Príklad 3.5.8. Nech $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$. Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ neexistuje.

Riešenie. Zoberme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$. Ak položíme $\delta_1 = \varepsilon$, potom pre každé $x \in (1 - \delta_1, 1)$ platí $|f(x) + 1| = \left| \frac{-x+1}{x-1} + 1 \right| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon$, teda $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$.

Podobne, ak ku zvolenému $\varepsilon > 0$ položíme $\delta_2 = \varepsilon$, potom pre každé $x \in (1, 1 + \delta_2)$ platí $|f(x) - 1| = \left| \frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right| = \left| \frac{x-1}{x-1} - 1 \right| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, teda $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$.

Použitím Heineho definície limity ukážeme, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Zoberme dve postupnosti $\{1 + \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Obidve konvergujú ku 1 a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, čo je rôzne od $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1 - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$. $\square$

Príklad 3.5.9. Dokážme, že ak χ je Dirichletova funkcia (príklad 3.1.6), potom $\lim_{x \rightarrow a^+} \chi(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} \chi(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \chi(x)$, $a \in \mathbb{R}$ neexistujú.

Riešenie. Oborom hodnôt $H(\chi) = \{0, 1\}$ to znamená, že pre každé $\delta > 0$ je obrazom prstencového δ -okolia bodu a množina $\{0, 1\}$. Ak b je ľubovoľné reálne číslo, tak vieme nájsť číslo $\varepsilon > 0$ také, že neplatí $0 \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ a zároveň $1 \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Teda žiadne číslo $b \in \mathbb{R}$ nie je $\lim_{x \rightarrow a} \chi(x)$. Analogicky sa to ukáže pre jednostranné limity. $\square$

Uvedené príklady naznačili, aký je asi súvis medzi limitou funkcie f v bode a a jej jednostrannými limitami v danom bode a .

Veta 3.5.10. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ práve vtedy, ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

Dôkaz. Ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ dostávame tvrdenie vety priamo z definícií 3.5.1 a 3.5.7, pretože prstencové δ -okolie bodu a $O_\delta^*(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Nech teraz $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$. Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Z definície jednostranných limit nájdeme $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ také, že

$$\begin{aligned} \forall x \in (a, a + \delta_1) &\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ \text{a } \forall x \in (a - \delta_2, a) &\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre každé $x : 0 < |x - a| < \delta$ platí, že buď $x \in (a, a + \delta_1)$ alebo $x \in (a - \delta_2, a)$ a preň platí nerovnosť $|f(x) - b| < \varepsilon$, teda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. $\square$

Veta 3.5.11. Funkcia f má v bode a najviac jednu limitu a tiež najviac jednu limitu sprava, resp. zľava.

Dôkaz. Urobíme ho pre obojstrannú limitu. Predpokladajme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, pričom $A \neq B$. Zoberme $\varepsilon = \frac{1}{3}|A - B| > 0$. Podľa definície 3.5.1 k tomuto

ε existujú čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ také, že

$$\forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (3.18)$$

$$\forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon. \quad (3.19)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre všetky $x : 0 < |x - a| < \delta$ platí (3.18) a (3.19) a teda

$$|A - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |A - B|,$$

čo je spor, preto $A = B$.

Podobne sa dokáže tvrdenie vety pre jednostranné limity. $\square$

Ak napíšeme bez hlbšieho vyšetovania symbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ môžu nastať dva prípady. Buď tento symbol nemá zmysel, žiadne vhodné $b \in \mathbb{R}$ spĺňajúce definíciu 3.5.1 neexistuje, potom hovoríme, že funkcia f nemá v bode a limitu alebo vieme nájsť $b \in \mathbb{R}$, ktoré spĺňa definíciu 3.5.1 a potom je hodnota symbolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ jednoznačne určená. Vo všetkých tvrdeniach budeme rozoznávať dve časti – tvrdenie existenčné a tvrdenie o hodnote limity. Ak nie je existencia hľadanej limity obsiahnutá v predpokladoch vety, musíme ju dokázať. Teda zápis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ znamená dve tvrdenia:

1. existuje limita funkcie f v bode a ;
2. táto limita je rovná b .

Cvičenie

1. Na základe definície dokážte, že:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} = 2; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{4}.$$

2. Vyšetrite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, kde

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} -x + 1 & \text{pre } x \leq 1, \\ 2x + 2 & \text{pre } x > 1; \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|}; \\ \text{c) } f(x) &= [x]. \end{aligned}$$

3.6 Vety o limitách

Určiť limitu komplikovanej funkcie z definície 3.5.1 nemusí byť vždy jednoduché. Uvedieme vety, ktoré pomôžu vypočítať limitu funkcie, vety, ktoré ukážu niektoré lokálne vlastnosti (t.j. vlastnosti, ktoré platia na nejakom okolí daného bodu) funkcií majúcich limitu.

Veta 3.6.1. *Nech funkcia f má v bode a limitu. Potom existuje prstencové okolie bodu a , na ktorom je funkcia f ohraničená.*

Dôkaz. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Podľa definície 3.5.1 pre číslo $\varepsilon = 1$ môžeme nájsť číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in O_\delta^*(a)$ platí nerovnosť $b - 1 < f(x) < b + 1$. To znamená, že funkcia f je ohraničená na prstencovom δ -okolí bodu a . $\square$

Táto veta je dôležitá. K nej obrátená veta hovorí, že ak je funkcia neohraničená na každom prstencovom okolí bodu a , potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje. Funkcia nemusí mať limitu v danom bode z viacerých dôvodov, z nich jeden je neohraničenosť. Ak vyšetrujeme otázku existencie limity funkcie v danom bode, je dobré mať na zreteli ohraničenosť funkcie. Pozor však, funkcia ohraničená na okolí bodu a nemusí mať limitu v tomto bode.

Príklad 3.6.2. a) Funkcia $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ je ohraničená v prstencovom okolí bodu 1 a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ neexistuje (viď príklad 3.5.8).

b) Dirichletova funkcia je ohraničená v okolí ľubovoľného bodu $a \in \mathbb{R}$, ale nemá limitu v žiadnom bode $a \in \mathbb{R}$ (viď príklad 3.5.9).

Nasledujúca veta dáva odhad hodnôt funkcie. Dôkaz vety vyplýva jednoducho z definície 3.5.1 a preto ho prenechávame čitateľovi.

Veta 3.6.3. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.*

- a) *Ak $r < b$, potom existuje prstencové okolie bodu a , na ktorom $f(x) > r$.*
- b) *Ak $r > b$, potom existuje prstencové okolie bodu a , na ktorom $f(x) < r$.*

Poznámka. V prípade $r = 0$ veta 3.6.3 hovorí, že funkcia f zachováva znamienko svojej limity na nejakom okolí bodu a .

Veta 3.6.4. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ a $A < B$. Potom existuje prstencové okolie bodu a , na ktorom $f(x) < g(x)$.*

Dôkaz. Podľa definície limity k danému číslu $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ existujú čísla δ_1, δ_2 také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow A - \frac{B-A}{2} < f(x) < A + \frac{B-A}{2}, \quad (3.20)$$

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow B - \frac{B-A}{2} < g(x) < B + \frac{B-A}{2}, \quad (3.21)$$

Nech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre všetky $x \in O_\delta^*(a)$ platí (3.20) a (3.21), odkiaľ $f(x) < \frac{A+B}{2} < g(x)$ a teda $f(x) < g(x)$ pre všetky $x \in O_\delta^*(a)$. $\square$

Veta 3.6.5. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ a existuje prstencové okolie bodu a , na ktorom $f(x) \leq g(x)$. Potom $A \leq B$.*

Dôkaz. Urobíme ho sporom. Nech $A > B$. Potom podľa vety 3.6.4 na istom prstencovom okolí bodu a platí $f(x) > g(x)$, čo je v spore s predpokladom. Teda platí $A \leq B$. $\square$

Poznámka. Ak existujú $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a nerovnosť medzi funkciami je ostrá, napr. $f(x) < g(x)$ na nejakom prstencovom okolí bodu a , môžeme vo všeobecnosti tvrdiť iba $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Znak ostrej nerovnosti sa vo všeobecnosti limitným prechodom nezachováva. Napr. na prstencovom okolí bodu 0, t.j. na $(-1, 0) \cup (0, 1)$ platí $x^4 < x^2$ a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$.

Veta 3.6.6. *Nech na nejakom prstencovom okolí bodu a platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existuje δ_1 také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad (3.22)$$

a pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ vieme nájsť čísla $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ také, že platí

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon, \quad (3.23)$$

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \quad (3.24)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Potom na prstencovom δ -okolí bodu a platia nerovnosti (3.22), (3.23), (3.24) a preto

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$. $\square$

Dôsledok 3.6.7. (vety 3.6.8) Nech $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a na nejakom prstencovom okolí bodu a platí $|f(x)| \leq g(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Príklad 3.6.8. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right)$.

Riešenie. Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ platí

$$\left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x} \right] + 1 \quad \text{odkiaľ} \quad 0 \leq |x| \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) < |x|.$$

Keďže $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$, podľa vety 3.6.8 je $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = 0$. $\square$

Nasledujúce vety sa budú týkať vlastností limít spojených s algebraickými operáciami.

Veta 3.6.9. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Potom*

- a) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$,
- b) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$,
- c) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
- d) ak $B \neq 0$ je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady vety. Potom k ľubovoľne zvolenému číslu $\eta > 0$ existujú čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \eta, \quad (3.25)$$

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \eta. \quad (3.26)$$

a) Keďže pre každé $a, b \in \mathbb{R}$ je $||a| - |b|| \leq |a - b|$, potom podľa (3.25)

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow ||f(x) - A| \leq |f(x) - A| < \eta,$$

čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$.

b) Zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a k nemu η tak, aby $2\eta = \varepsilon$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre každé $x \in O_\delta^*(a)$ platí (3.25), (3.26) a tak máme

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < 2\eta = \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$.

c) Z existencie $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ podľa vety 3.6.1 vyplýva existencia prstencového okolia bodu a , na ktorom je funkcia g ohraničená, t.j.

$$\exists \delta_3 > 0 \exists K > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x)| \leq K. \quad (3.27)$$

Položme $L = \max\{K, |A|\}$ a upravme pre $x \in O_{\delta_3}^*(a)$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |(f(x) - A)g(x) + (g(x) - B)A| \leq \\ &\leq |f(x) - A||g(x)| + |g(x) - B||A| \leq \\ &\leq L(|f(x) - A| + |g(x) - B|). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a k nemu $\eta > 0$ tak, aby $2\eta L = \varepsilon$. K nájdenému číslu η podľa (3.25), (3.26) nájdeme príslušné δ_1, δ_2 . Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Na prstencovom δ -okolí bodu a platí (3.25), (3.26), (3.27) a z (3.28) dostaneme

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - AB| < L \left(\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L} \right) = \varepsilon,$$

a teda $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = A \cdot B$.

d) Dokážeme najprv, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ pokiaľ $B \neq 0$. Podľa predpokladu vety a vlastnosti a) je $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |B| > |B/2| > 0$. Podľa vety 3.6.3 potom existuje číslo $\delta_3 > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x)| > \frac{B}{2} > 0$$

$$\text{a tiež} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{Bg(x)} \right| \leq \frac{|g(x) - B|}{\frac{1}{2}|B|^2}. \quad (3.29)$$

Zvoľme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a k nemu $\eta > 0$ tak, aby $2\eta = \varepsilon|B|^2$ a príslušné $\delta_2 > 0$, pre ktoré platí (3.26). Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$. Potom na $O_\delta^*(a)$ platí (3.26), (3.29) a preto

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

Keďže $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ podľa vlastnosti c) je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

□

Dôsledok 3.6.10. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Potom*

- a) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA$, $c \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = A^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Príklad 3.6.11. a) Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \frac{1}{x})$.

Použitím Cauchyho definície ľahko dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$. Potom, vzhľadom na dôsledok 3.6.12, je $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ a podľa vety 3.6.11 je $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ a tiež $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

b) Ak $P(x)$ je polynóm $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$, potom $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$. Vyplýva to z kombinácií predchádzajúcich tvrdení a to: $c_k x^k \rightarrow c_k a^k$ pre $x \rightarrow a$, $k = 1, \dots, n$ a vety o súčte limit.

Uvedomme si, že ak má funkcia $f + g$, resp. $f \cdot g$ v bode a limitu nevyplýva z toho, že funkcie f, g majú v tomto bode limitu. Ilustruje to nasledujúci príklad.

Príklad 3.6.12. Nech $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + [\frac{1}{x}]$, $g(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$. Potom $f(x) + g(x) = 1$ pre $x \neq 0$. Súčet týchto funkcií má limitu $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 1$ zatiaľ čo žiadna z funkcií f , g nemá v bode 0 limitu (viď príklad 3.5.6).

Ďalej si všimnime, že ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nevieme o limite podielu $\frac{f}{g}$ v bode a povedať či existuje a ak existuje, aká je jej hodnota.

Je to tzv. **neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$** .

Príklad 3.6.13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]) = 0$ (príklad 3.6.10), $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ale limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}])}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]) \text{ neexistuje (príklad 3.5.6).}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} \text{ neexistuje, lebo funkcia } h(x) = \frac{x^2}{x^3} \text{ nie je ohraničená na žiadnom prstencovom okolí bodu 0.}$$

V špeciálnom prípade pre limitu súčinu funkcií platí veta.

Veta 3.6.14. Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu a . Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Dôkaz. Nech $\delta_1 > 0$ je také, že funkcia g je ohraničená na $O_{\delta_1}^*(a)$. To znamená, že existuje konštanta $K > 0$ taká, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < K. \quad (3.30)$$

Ďalej k zvolenému číslu $\eta > 0$ vieme nájsť $\delta_2 > 0$ také, že platí

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)| < \eta. \quad (3.31)$$

Zvoľme ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a k nemu nájdeme η tak, aby $\eta K = \varepsilon$ a príslušné $\delta_2 > 0$, pre ktoré platí (3.31). Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre každé $x \in O_\delta^*(a)$ platí (3.30), (3.31) a tiež

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < K\eta = \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$. □

Všetky vety, ktoré sme uviedli v tejto časti, platia aj v prípade, že sa jedná o jednostranné limity. Môžeme v týchto vetách nahradiť slovo „limita“ všade „limitou sprava“, resp. „limitou zľava“ a príslušné prstencové okolie bodu nahradiť okolím sprava, resp. okolím zľava daného bodu.

Ostal ešte problém limity zloženej funkcie.

Veta 3.6.15. *Nech existujú $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = A$, pričom pre všetky x z nejakého prstencového okolia bodu a platí $\varphi(x) \neq b$. Potom v bode a existuje limita zloženej funkcie $f(\varphi)$ a platí*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow b} f(y) = A.$$

Dôkaz. Nech číslo $\delta_1 > 0$ je také, že $\varphi(x) \neq b$ pre každé $x \in O_{\delta_1}^*(a)$. K ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ nájdeme $\eta > 0$ také, že platí

$$\forall y : 0 < |y - b| < \eta \Rightarrow |f(y) - A| < \varepsilon. \quad (3.32)$$

K nájdennému číslu η nájdeme $\delta_2 > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(x) - b| < \eta. \quad (3.33)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre všetky $x \in O_\delta^*(a)$ platí (3.33) a $\varphi(x) \neq b$, teda $y = \varphi(x)$ je z prstencového η -okolia bodu b a preň platí (3.32). Ukázali sme, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - A| < \varepsilon,$$

$$\text{t.j. } \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A. \quad \square$$

Predpoklad $\varphi(x) \neq b$ na nejakom prstencovom okolí bodu a je vo vete dôležitý a nedá sa vylúčiť, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 3.6.16. a) Nech $\varphi(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$f(y) = \begin{cases} 2 & \text{pre } y = 1, \\ 3 & \text{pre } y \neq 1. \end{cases}$$

Platí $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ pre každé $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 3$. Avšak $f(\varphi(x)) = f(1) = 2$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = 2 \neq 3 = \lim_{y \rightarrow 1} f(y)$. Nie je splnená podmienka $\varphi(x) \neq 1$ na nejakom prstencovom okolí bodu a .

b) Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x+3}$. Platí $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5$, $2x+3 \neq 5$ pre $x \neq 1$ a $\lim_{y \rightarrow 5} \sqrt{y} = \sqrt{5}$, potom podľa vety 3.6.17 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x+3} = \sqrt{5}$.

Veta 3.6.17 dáva postačujúcu (nie nutnú) podmienku pre existenciu limity zloženej funkcie. To znamená, že limita zloženej funkcie môže existovať aj keď neexistujú limity funkcií f, φ .

Príklad 3.6.17. Ak χ je Dirichletova funkcia, potom $\chi(\chi(x)) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Teda v ľubovoľnom bode $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow a} \chi(\chi(x)) = 1$ aj keď $\lim_{x \rightarrow a} \chi(x)$ v žiadnom bode $a \in \mathbb{R}$ neexistuje.

Cvičenie

1. Vypočítajte: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)^2}{|x^2-1|}$; $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;
 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^3} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{[x]} \frac{x^2+2x}{x+1}$.
2. Nech $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q sú polynómy. Vyšetrite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pre $a \in \mathbb{R}$, $Q(a) \neq 0$, resp. $a \in \mathbb{R}$, $Q(a) = 0$.
3. Nájdite $\lim_{x \rightarrow 2} f(g(x))$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(f(x))$ pre
 a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
4. Dokážte, že ak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

3.7 Rôzne typy limit

Limita funkcie f v bode a popisuje priebeh funkcie f v blízkosti bodu a . Pre poznanie priebehu funkcie je však dôležité vedieť, ako sa funkcia správa ak buď x alebo $(-x)$ neobmedzene rastie. Pre tento účel zavedieme pojem limity funkcie v nevlastnom bode $+\infty$, resp. $-\infty$.

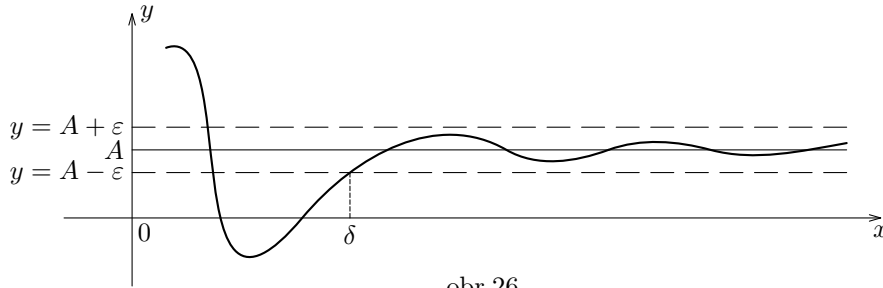
Definícia 3.7.1. a) Nech funkcia f je definovaná v istom okolí bodu $+\infty$. Hovoríme, že číslo **A** je **limitou funkcie f v bode $+\infty$** , ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x > \delta$, $x \in D(f)$, platí nerovnosť $|f(x) - A| < \varepsilon$. Zapisujeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

b) Nech funkcia f je definovaná v istom okolí bodu $-\infty$. Hovoríme, že číslo **B** je **limitou funkcie f v bode $-\infty$** , ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x < -\delta$, $x \in D(f)$, platí nerovnosť $|f(x) - B| < \varepsilon$. Zapisujeme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$.

Úloha 3.7.2. Pomocou logických symbolov zapíšte definíciu 3.7.1.

Geometrická interpretácia $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (obr.26). Ak zoberieme pás ohraňovaný priamkami $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$ existuje také číslo $\delta > 0$, že všetky body $[x, f(x)]$ grafu funkcie $y = f(x)$ ležia pre $x > \delta$ vo vnútri tohto pásu.

Geometrickú interpretáciu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ prenechávame čitateľovi.



obr.26

Príklad 3.7.3. a) Nech $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Pre $x > 1$ platí $1 < x < x^n$ a teda $0 < \frac{1}{x^n} < \frac{1}{x}$. Ak $\frac{1}{x} < \varepsilon$, potom pre všetky $x > \delta = \max\{1, \frac{1}{\varepsilon}\}$ bude $\frac{1}{x^n} < \varepsilon$, t.j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Dokáž, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ prenechávame čitateľovi.

b) Nech $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x^2+1}$. Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$. Utvorme rozdiel

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2x^2-1}{3x^2+1} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{-5}{3(3x^2+1)} \right| < \frac{5}{9x^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Nerovnosť $\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$ bude splnená, ak $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$, t.j. pre všetky $x > \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Teda $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

c) Nech $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$. Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Upravme

$$\left| \sqrt{x^2+1} + x \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} < \frac{1}{2|x|} \quad \text{pre } x < 0.$$

Ak $\frac{1}{2|x|} < \varepsilon$, t.j. ak $x < -\delta = -\frac{1}{2\varepsilon}$ bude $\left| \sqrt{x^2+1} + x \right| < \varepsilon$, to znamená $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Nasledujúca veta je užitočná pri výpočte limit v $+\infty$, resp. $-\infty$.

Veta 3.7.4. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ práve vtedy, ak $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ práve vtedy, ak $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = B$.

Dôkaz. a) Nech $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x > \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Položme $x = \frac{1}{t}$. Potom pre $0 < t < \frac{1}{\delta_1}$ platí $\frac{1}{t} > \delta_1$ a teda $|f(\frac{1}{t}) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon$. Označme $\delta = \frac{1}{\delta_1}$. Ukázali sme tak, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (0, \delta) \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - A \right| < \varepsilon$$

čo znamená, že $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$.

Nech teraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A$. To znamená

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in (0, \delta_1) \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{x}\right) - A \right| < \varepsilon.$$

Označme $t = \frac{1}{x}$. Pre $0 < x < \delta_1$ je $t > \frac{1}{\delta_1}$ a $|f(t) - A| < \varepsilon$. Ak položíme $\delta = \frac{1}{\delta_1}$ máme

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t > \delta \Rightarrow |f(t) - A| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = A.$$

Prípad b) dokážeme podobne. □

Príklad 3.7.5. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+5}$.

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x} + 1}{\frac{2}{x} + 5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3+x}{2+5x} = \frac{3}{2}.$$

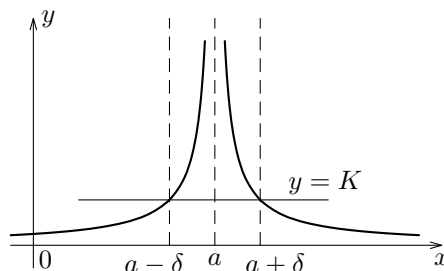
□

Ak limita funkcie f sa rovná A pre $x \rightarrow a$, resp. $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ hovoríme namiesto „ $f(x)$ má limitu rovnú A “ tiež „ $f(x)$ má **vlastnú limitu**“. Vety, ktoré sme doteraz uviedli pre vlastné limity v bode a platia aj pre vlastné limity v $+\infty$, resp. $-\infty$. Čitateľ si ľahko sformuluje a dokáže tieto vety. Je potrebné si iba ujasniť, že pod prstencovým okolím bodu $+\infty$ ($-\infty$) rozumieme nejaký interval (δ, ∞) ($(-\infty, -\delta)$), kde $\delta > 0$.

Vieme už, že nutnou podmienkou k tomu, aby funkcia mala vlastnú limitu v bode a (môže byť aj $a = +\infty$, resp. $a = -\infty$) je ohraničenosť tejto funkcie na nejakom prstencovom okolí bodu a . Uvažujme funkciu $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Táto funkcia nie je ohraničená na žiadnom prstencovom okolí bodu nula a preto nemá vlastnú limitu v tomto bode. Keď sa však argument x blíži k nule hodnota $f(x)$ neobmedzene narastá. Hovoríme, že funkcia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ má v bode 0 nevlastnú limitu $+\infty$.

Definícia 3.7.6. Nech funkcia f je definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu a . Hovoríme, že funkcia **f má v bode a nevlastnú limitu $+\infty$** (resp. $-\infty$), ak ku každému číslu $K > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$, pre ktoré $0 < |x - a| < \delta$, platí nerovnosť $f(x) > K$ (resp. $f(x) < -K$). Označujeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Geometrická interpretácia $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Ak je dané číslo $K > 0$ akokoľvek veľké, ležia body $[x, f(x)]$ grafu funkcie f (výnimkou môže byť bod $[a, f(a)]$) nad priamkou $y = K$, ak hodnota argumentu x leží v intervale $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.



Ak v definícii 3.7.6 namiesto prstencového δ -okolía bodu a zoberieme pravé okolie bodu a , t.j. interval $(a, a + \delta)$, resp. ľavé okolie bodu a , t.j. interval $(a - \delta, a)$, dostaneme definíciu nevlastnej limity v bode a sprava, resp. v bode a zľava.

Podobne z definície 3.7.6 dostaneme definíciu nevlastnej limity v nevlastnom bode $+\infty$, resp. $-\infty$, ak namiesto prstencového δ -okolía bodu a uvažujeme okolie bodu $+\infty$, resp. $-\infty$, t.j. interval (δ, ∞) , resp. $(-\infty, -\delta)$, kde $\delta > 0$.

Ako v prípade vlastnej limity aj pre nevlastné limity platí veta 3.5.10, to znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) práve vtedy, ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ($-\infty$).

Úloha 3.7.7. Pomocou logických symbolov sformulujte nasledujúce tvrdenia a urobte ich geometrickú interpretáciu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. & \end{aligned}$$

Príklad 3.7.8. a) Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Nerovnosť $\frac{1}{x^2} > K$, K je ľubovoľné kladné číslo, je splnená, ak $x^2 < \frac{1}{K}$, t.j. $|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$. Položme $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Potom

$$\forall x : 0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > K.$$

b) Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Zoberme K ľubovoľné kladné číslo. Nerovnosť $\frac{1}{x} > K > 0$ je splnená pre $x > 0$ a $x < \frac{1}{K}$. Položme $\delta = \frac{1}{K}$. Potom pre všetky $x \in (0, \frac{1}{K})$ platí $\frac{1}{x} > K$, t.j. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Podobne nerovnosť $\frac{1}{x} < -K < 0$ bude splnená pre $x < 0$ a $x > -\frac{1}{K}$. Položme $\delta = \frac{1}{K}$, potom pre všetky $x \in (-\delta, 0)$ platí $\frac{1}{x} < -K$, t.j. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

c) Dokážme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Vieme, že $(1+h)^n \geq 1+nh$ pre $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$. V intervale $(1, \infty)$ je $x-1 > 0$ a teda $x^n = (1+(x-1))^n \geq 1+n(x-1)$. Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+n(x-1)) = \infty$, na základe vety 3.6.5 je $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$.

Teraz dokážeme niekoľko viet o nevlastných limitách. Budeme ich formulovať pre limity vo vlastnom bode. Čitateľ sám ľahko sformuluje a dokáže analogické tvrdenia pre limity v nevlastnom bode $+\infty$, resp. $-\infty$.

Veta 3.7.9. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a funkcia g je zdola ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu a . Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$.*

Dôkaz. Nech K je ľubovoľné kladné číslo. Funkcia g je ohraničená zdola na nejakom prstencovom okolí bodu a , t.j. existujú $\delta_1 > 0$ a $k \in \mathbb{R}$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > k. \quad (3.34)$$

Ďalej z predpokladu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ máme, že pre každé číslo $K' > 0$, teda aj $K' > K - k$ existuje číslo $\delta_2 > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > K'. \quad (3.35)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom na $O_\delta^*(a)$ platí (3.34), (3.35) a tak

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > K' + k > K,$$

to znamená $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$. □

Dôsledok 3.7.10. *vety 3.7.9 Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > -\infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$.*

Ak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ nedá sa o limite súčtu $f + g$ v bode a povedať či existuje. Je to tzv. **neurčitý výraz typu $\infty - \infty$** .

Príklad 3.7.11. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + (-1)^{[x]}) = \infty$ pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ a funkcia $g(x) = (-1)^{[x]}$ je ohraničená funkcia (veta 3.7.9),

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2) = \infty$ pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ (dôsledok 3.7.10).

c) Vyšetrite $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2)$. Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2$ dostávame neurčitý výraz $\infty - \infty$. Avšak $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Zoberme K ľubovoľné kladné číslo. Potom pre $x > \sqrt[4]{K}$ je $x^2 > \sqrt{K}$ a ak $x > 1 + \sqrt{K}$ je $x - 1 > \sqrt{K}$. Zoberme teraz $K > 1$, potom $1 + \sqrt{K} > \sqrt{K} > \sqrt[4]{K}$ a pre všetky $x > \delta = 1 + \sqrt{K}$ bude $x^2(x - 1) > K$, to znamená $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2) = \infty$.

d) Vyšetrite $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$. Keďže pre $x > 0$ platí $\sqrt{x^2 + 1} > x$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, potom je $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} = \infty$. Máme neurčitý výraz $\infty - \infty$. Avšak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$.

Veta 3.7.12. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a funkcia g je ohraničená zdola kladným číslom na nejakom prstencovom okolí bodu a . Potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \infty$.*

Dôkaz. Nech $\delta_1 > 0$ je také, že na prstencovom δ_1 -okolí bodu a je funkcia g zdola ohraničená kladnou konštantou, t.j. existuje $k > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > k. \quad (3.36)$$

Ďalej k zvolenému číslu $L > 0$ vieme nájsť $\delta_2 > 0$ také, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > L. \quad (3.37)$$

Nech K je ľubovoľné kladné číslo a k nemu zvolme $L = \frac{K}{k}$. K tomuto L nájdeme príslušné δ_2 , aby platilo (3.37). Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pre každé $x \in O_\delta^*(a)$ platí (3.36), (3.37) a teda $f(x) \cdot g(x) > Lk = K$. Ukázali sme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$. $\square$

Dôsledok 3.7.13. (vety 3.7.12) Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > A > 0$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$.

Ak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nedá sa o limite súčinu $f \cdot g$ povedať či existuje. Je to tzv. **neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$** .

Príklad 3.7.14. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x - [x] + 2) = \infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ a $x - [x] + 2 \geq 2$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ (veta 3.7.12).

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{1 + x^2} = \infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x^2} = \infty$ (dôsledok 3.7.13).

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{1 + x^2} = \infty$ a
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)(x\sqrt{1 + x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x^2} = \infty$.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{1+x^2} = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} (x\sqrt{1+x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+1} = 1.$$

Nasledujúce dve vety uvedieme bez dôkazu, pretože ich dôkaz ľahko vyplýva z definícií príslušných limit.

Veta 3.7.15. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$, potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

Veta 3.7.16. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a na nejakom prstencovom okolí bodu a je $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$). Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$).*

Príklad 3.7.17. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ a $\sqrt{x} > 0$ pre $x > 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x^{2n+1}|} = \infty$, lebo $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Avšak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}}$ neexistuje, pretože x^{2n+1} mení znamienko v bode 0 a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$.

Ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, nedá sa nič povedať o existencii limitu podielu $\frac{f}{g}$. Je to tzv. **neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$** .

Príklad 3.7.18. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 1) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x + 1) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = \infty$ a pre podiel dostaneme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{x^2+1}) = \infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(x - [x] + 2) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-[x]+2)}{x+1}$ neexistuje, lebo $\frac{x(x-[x]+2)}{x+1} = x - [x] + 2 - \frac{x-[x]+2}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-[x]+2}{x+1} = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - [x] + 2)$ neexistuje.

Cvičenie

- Na základe definície dokažte, že: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = -\infty$.
- Vypočítajte: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x-x^2})$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q sú polynómy; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{(x-2)^3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
- Určte $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ za predpokladu, že:
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, funkcia g je zhora ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu a ,
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.
- Vyšetrite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ v bode a , kde P, Q sú polynómy a $Q(a) = 0$.

5. Rozhodnite, či platia tvrdenia:

- a) Nech funkcia f je definovaná na $\mathbb{R}$ a nie je zhora ohraničená na žiadnom prstencovom okolí bodu 0. Potom $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.
- b) Nech $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Potom existuje okolie bodu 0 také, že funkcia f je zdola ohraničená na tomto okolí.

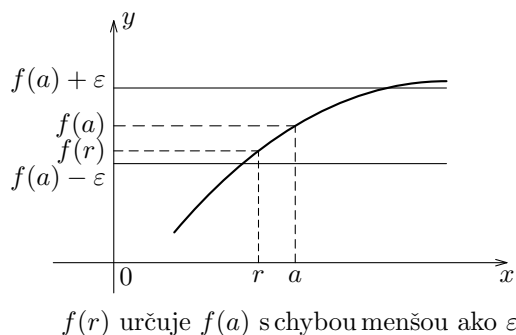
6. Nech f je nekonštantná, periodická funkcia definovaná na $\mathbb{R}$. Dokážte, že potom neexistuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

7. Nech funkcia f je definovaná a neklesajúca na (a, b) . Potom, ak:

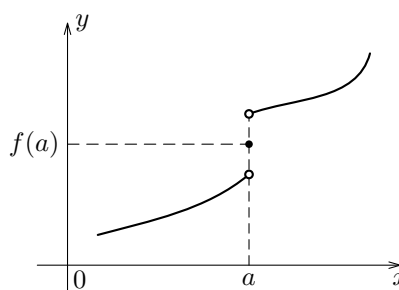
- a) f je zhora ohraničená na (a, b) je $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$;
- b) f nie je zhora ohraničená na (a, b) je $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$;
- c) f je zdola ohraničená na (a, b) je $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$;
- d) f nie je zdola ohraničená na (a, b) je $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Dokážte. Sformulujte a dokážte analogické tvrdenie pre nerastúcu funkciu.

3.8 Spojité funkcie



obr.27



obr.28

V praxi, pri výpočte hodnoty funkcie s predpísanou presnosťou, sa často zamení hodnota argumentu nejakou jeho približnou hodnotou a pre túto sa vypočíta funkčná hodnota. Napr. namiesto danej iracionálnej hodnoty argumentu sa zoberie jeho približná racionálna hodnota. Čím presnejšie chceme vypočítať hodnotu funkcie $f(a)$, tým „bližšie“ k hodnote a berieme približnú hodnotu argumentu. Toto však môžeme použiť iba vtedy, ak vopred vieme, že zmena funkčnej hodnoty (t.j. prípustná chyba) môže byť urobená dostatočne malá pre malé zmeny argumentu (obr.27). Túto vlastnosť nemá každá funkcia, nemá ju funkcia, ktorej funkčná hodnota sa mení „skokom“ (obr.28). Napr. nie je možné vypočítať

hodnotu Dirichletovej funkcie s ľubovoľnou presnosťou v bode $\sqrt{2}$ zamenou $\sqrt{2}$ za približnú racionálnu hodnotu, lebo $\chi(\sqrt{2}) = 0$ ale $\chi(r) = 1$ v ľubovoľnom $r \in \mathbb{Q}$. Vlastnosť funkcie – malej zmene argumentu odpovedá malá zmeny funkčnej hodnoty – nazveme spojitosť. Tieto úvahy matematicky presne vystihuje pojem limity.

Definícia 3.8.1. Funkciu f definovanú na nejakom okolí bodu a **nazveme spojitou v bode a** , ak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (3.38)$$

To znamená, že ak je funkcia f spojitá v bode a , potom platí:

1. $a \in D(f)$;
2. funkcia je definovaná na nejakom okolí bodu a , to znamená, že existuje číslo $\delta > 0$ také, že $(a - \delta, a + \delta) \subset D(f)$;
3. existuje vlastná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$;
4. $A = f(a)$.

Podmienku spojitosti funkcie f v bode a , ktorá je vyjadrená podmienkou (3.38) môžeme sformulovať pomocou logických symbolov aj pomocou postupností takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (3.39)$$

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in D(f), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \quad (3.40)$$

Upozorňujeme, že v definícii spojitosti, na rozdiel od definície limity, bod a ako aj funkčná hodnota $f(a)$ sa nevyklúčujú z nerovností (3.39). Bod, v ktorom funkcia f nie je spojitá, nazývame **bodom nespojitosti** funkcie f . Bod a je bodom nespojitosti funkcie f , ak nie je splnená aspoň jedna z podmienok 1)–4). V prípade, ak existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ale bod a nepatrí do definičného oboru funkcie f , môžeme funkciu f dodefinovať v bode a tak, aby bola spojitá v tomto bode. Položíme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } x \neq a, \\ A & \text{pre } x = a. \end{cases}$$

Príklad 3.8.2. a) Funkcia $f(x) = x$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$, lebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$.

b) Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

nie je spojitá v bode 0, lebo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

c) Funkcia $f(x) = \sqrt{x}$ je spojitá v každom bode $a > 0$. Keďže $f(a) = \sqrt{a}$ úpravou

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}. \quad (3.41)$$

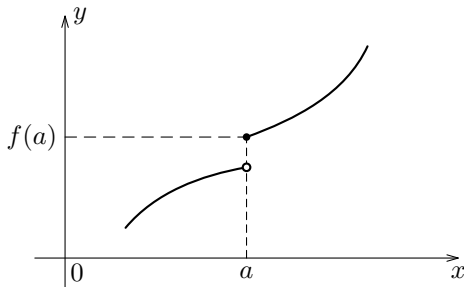
Zoberme ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ a k nemu $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$. Potom pre každé x : $|x - a| < \delta = \sqrt{a}\varepsilon$ zo vzťahu (3.41) dostaneme $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$. Ukázali sme, že platí (3.39), t.j. $f(x) = \sqrt{x}$ je spojitá v bode $a > 0$.

d) Funkcia $f(x) = \frac{|x|}{x}$ nie je spojitá v bode 0, pretože nie je definovaná v bode 0. Nedá sa ani v bode 0 dodefinovať na spojitú funkciu, pretože $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, to znamená, že neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

e) Funkcia $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ nie je spojitá v bode 0, lebo $0 \notin D(f)$ ale (příklad 3.6.8) $\lim_{x \rightarrow 0} x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) = 0$. Môžeme funkciu f dodefinovať na funkciu spojitú v bode 0

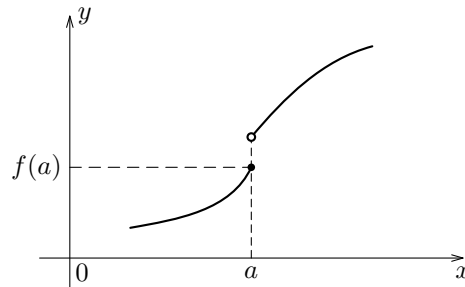
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]\right) & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases} \quad \square$$

Analogicky s pojmom limity sprava (zľava) zavedieme pojem spojitost' sprava (zľava).



funkcia spojitá sprava, nespojitá zľava v bode a

obr.29



funkcia nespojitá sprava, spojitá zľava v bode a

obr.30

Definícia 3.8.3. Funkciu f definovanú na nejakom intervale $\langle a, a+\delta \rangle$ ($(a-\delta, a)$) nazveme **spojitou sprava (resp. zľava) v bode a** , ak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$) (obr.29 (30)).

Je zrejmé, že platí veta.

Veta 3.8.4. Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, ak je v bode a spojitá sprava aj zľava.

Príklad 3.8.5. Funkcia $E(x) = [x]$ je spojitá sprava a nespojitá zľava v každom bode $a \in \mathbb{Z}$.

Riešenie. Nech $a \in \mathbb{Z}$, potom $E(a) = a$.

Vyšetříme spojitost sprava v bode a . Ak zoberieme $\delta_1 \in (0, 1)$, potom pre $x \in \langle a, a + \delta_1 \rangle$ platí $a \leq [x] < x$ teda $|E(x) - E(a)| = [x] - a < x - a$. Nech je dané ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Potom pre každé $x \in \langle a, a + \delta \rangle$ platí $|E(x) - E(a)| < \varepsilon$, t.j. $\lim_{x \rightarrow a^+} = E(a)$.

Nespojitost zľava v bode a . Ak $x < a$, potom

$$[x] \leq a - 1 < a \text{ a } |[x] - a| = a - [x] \geq 1.$$

To znamená, že existuje $\varepsilon = 1$ také, že pre každé $\delta > 0$ existuje $x_\delta \in (a - \delta, a)$ taký, že $|E(x_\delta) - E(a)| = |[x_\delta] - a| \geq 1$. Teda funkcia E nie je spojitá zľava v bode a . $\square$

Z viet o limitách funkcií v bode a definície spojitosti funkcie v bode dostávame nasledujúce vety.

Veta 3.8.6. *Nech funkcie f, g sú spojité v bode a . Potom aj funkcie $f + g, f - g, f \cdot g, |f|$ sú spojité v bode a . Navyše, ak $g(a) \neq 0$ je aj funkcia $\frac{f}{g}$ spojitá v bode a .*

Dôkaz vety jednoducho vyplýva z definície 3.8.1 a vety 3.6.9.

Príklad 3.8.7. a) Funkcia $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Vyplýva to z vety 3.8.6 a z faktu, že funkcia $f(x) = x$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$.

b) Polynomická funkcia $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ je spojitá v každom $a \in \mathbb{R}$. Vyplýva to z príkladu a) a vety 3.8.6.

c) Racionálna funkcia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ sú polynómy, je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$, pre ktorý $Q(a) \neq 0$. Vyplýva to z príkladu b) a vety 3.8.6.

Veta 3.8.8. *Nech funkcia f je spojitá v bode a . Potom je ohraničená na nejakom okolí bodu a (t.j. $\exists \delta > 0 \exists c > 0 \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| \leq c$).*

Dôkaz vety vyplýva z definície 3.8.1 a vety 3.6.1.

Veta 3.8.9. *Nech funkcia f je spojitá v bode a , pričom $f(a) \neq 0$. Potom na nejakom okolí bodu a znamienko funkcie f je totožné so znamienkom $f(a)$.*

Dôkaz vyplýva z definície 3.8.1 a vety 3.6.3.

Veta 3.8.10. *Nech $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a funkcia f je spojitá v bode b . Potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(b).$$

Dôkaz. Nech je dané ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Vzhľadom na spojitosť funkcie f v bode b existuje číslo $\eta > 0$ také, že

$$\text{pre každé } y : |y - b| < \eta \text{ platí } |f(y) - f(b)| < \varepsilon. \quad (3.42)$$

K nájdenému η existuje číslo $\delta > 0$ také, že

$$\text{pre každé } x : 0 < |x - a| < \delta \text{ platí } |\varphi(x) - (b)| < \varepsilon,$$

vzhľadom na existenciu $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$. Avšak pre všetky $x \in O_\delta^*(a)$ je $y = \varphi(x) \in O_\eta(b)$, čo znamená, že platí (3.42). Ukázali sme, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - f(b)| < \varepsilon,$$

t.j. $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = f(b)$. □

Poznámka. Veta 3.8.10 sa líši od vety 3.6.15 v tom, že predpoklad $\varphi(x) \neq b$ na nejakom prstencovom okolí bodu a sa nahradil predpokladom spojitosti vonkajšej zložky zloženej funkcie $f(\varphi)$ v bode b .

Veta 3.8.11. [o spojitosti zloženej funkcie] Nech funkcia φ je spojitá v bode a , funkcia f je spojitá v bode $b = \varphi(a)$. Potom funkcia $f(\varphi(x))$ je spojitá v bode a .

Dôkaz vety vyplýva z definície 3.8.1 a vety 3.8.10.

Uvedené vety dávajú len postačujúce podmienky spojitosti súčtu, súčinu, podielu funkcií a zloženej funkcie.

Príklad 3.8.12. a) Funkcia $f(x) = x$ je spojitá v bode 0,

$$\text{funkcia } g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases} \text{ nie je spojitá v bode } 0.$$

$$\text{Súčin } h(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x \cdot \frac{|x|}{x} & \text{pre } x \neq 0 \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases} \text{ je funkcia spojitá v bode } 0.$$

b) Dirichletova funkcia $\chi(x)$ je nespojitá v ľubovoľnom $a \in \mathbb{R}$. Zložená funkcia $\chi(\chi(x)) = 1$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{c) Funkcia } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \text{ racionálne} \\ -1 & \text{pre } x \text{ iracionálne} \end{cases}$$

je nespojitá v ľubovoľnom bode $a \in \mathbb{R}$. Avšak funkcia $F(x) = (f(x))^2 = 1$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$.

Cvičenie

1. Pomocou $(\varepsilon - \delta)$ definície dokážte spojitosť funkcie $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ v bode $x_0 = 2$.
2. Vyšetrite spojitosť funkcií: $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$; $f(x) = x \cdot [x]$; $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{pre } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} & \text{pre } x \neq -1 \\ 0 & \text{pre } x = -1 \end{cases}; \quad f(x) = \left[\frac{1}{x} \right].$$
3. Zistite, či sa dá funkcia f spojiť dodefinovať v bode a , ak:
 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $a = 0$; $f(x) = \frac{5x^2-3x}{2x}$, $a = 0$.
4. Zistite, či:
 - a) môže byť súčet, súčin dvoch nespojitých funkcií v bode a funkcia spojitá v bode a ;
 - b) môžu byť funkcie $f + g$, $f \cdot g$ spojité v bode a , ak f je spojitá v bode a , g je nespojitá v bode a .
Uveďte príklady.
5. Zistite, či platí tvrdenie:
 - a) Funkcia f je spojitá v bode a , funkcia g je ohraničená na istom okolí bodu a . Potom je $f \cdot g$ spojitá v bode a .
 - b) Funkcia f je spojitá v bode a , $f(a) = 0$, funkcia g je ohraničená na istom okolí bodu a . Potom $f \cdot g$ je spojitá v bode a .
Uveďte príklady.
6. Nech f_1, f_2, f_3 sú také funkcie, že $f_1 + f_2 + f_3$ je spojitá v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom sú buď všetky tri funkcie spojité v bode a alebo aspoň dve z nich sú spojité v bode a . Ukážte na príkladoch, že môžu nastať obidva prípady.
7. Nájdite príklad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, aby:
 - a) bola spojitá iba v jednom bode;
 - b) bola nespojitá iba v bodoch $0, \frac{1}{2}, 1$.

3.9 Spojitosť funkcie na množine

Definícia 3.9.1. Funkciu f definovanú na množine M nazývame **spojitou na M** , ak je spojitá v každom bode množiny M .

Funkciu f definovanú na intervale $\langle a, b \rangle$ nazývame **spojitou na $\langle a, b \rangle$** , ak je spojitá v každom bode intervalu (a, b) , spojitá sprava v bode a a spojitá zľava v bode b .

Príklad 3.9.2. a) Polynomická funkcia $P(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

b) Funkcia $E(x) = [x]$ je spojitá na intervaloch $(0, 1)$, $\langle 0, 1)$ ale nie je spojitá na intervale $\langle 0, 1\rangle$, lebo nie je spojitá v bode 1 zľava ($\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq 1 = E(1)$).

Vieme, že spojitosť funkcie v bode dáva určitú informáciu o vlastnostiach funkcie na istom okolí tohto bodu (napr. vety 3.8.8, 3.8.9). Poznamenajme však, že zo spojitosti funkcie f v bode nevyplýva spojitosť tejto funkcie na nejakom okolí tohto bodu. Napr. funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pre } x \text{ racionálne,} \\ -x, & \text{pre } x \text{ iracionálne,} \end{cases}$$

je spojitá iba v bode 0 a nespojitá v každom bode rôznom od 0 (Dokážte!). Dá sa očakávať, že predpoklad spojitosti funkcie na množine bude zárukou „dobrých“ vlastností funkcie f na tejto množine. Ukazuje sa, že tieto vlastnosti sú aj dôsledkom štruktúry množiny reálnych čísel, hlavne axiómy o supreme, resp. vety o infime.

Veta 3.9.3. [Weierstrassova o ohraničenosti] Nech funkcia f je definovaná a spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. Potom je funkcia f ohraničená na $\langle a, b \rangle$.

Dôkaz. Pripustíme, že funkcia f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a nie je na tomto intervale ohraničená. To znamená

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \langle a, b \rangle : |f(x_n)| > n. \quad (3.43)$$

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je ohraničená a podľa Bolzano–Weierstrassovej vety (veta 2.6.7) sa z tejto postupnosti dá vybrať konvergentná postupnosť, t.j. existuje postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ a číslo α také, že

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha. \quad (3.44)$$

Z prvej podmienky (3.44) vyplýva, že $\alpha \in \langle a, b \rangle$ a vzhľadom na spojitosť funkcie f v bode α máme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha). \quad (3.45)$$

Avšak vzťah (3.43) platí aj pre $n = n_k$, t.j. $|f(x_{n_k})| > n_k$, $k = 1, 2, \dots$, odkiaľ dostávame, že $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = \infty$. To je však v spore s (3.45). $\square$

Podľa dokázanej vety je množina

$$A = \{y, y \in \mathbb{R} : \exists x \in \langle a, b \rangle, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}$$

neprázdna, ohraničená a preto existujú $\sup A = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$, $\inf A = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$.

Uvedomme si, že obidva predpoklady vety 3.9.3 – spojitosť funkcie f a uzavretosť intervalu $\langle a, b \rangle$ – zohrávajú dôležitú úlohu.

Príklad 3.9.4. a) Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na otvorenom intervale $(0, 1)$ a nie je na tomto intervale ohraničená.

b) Funkcia $f(x) = x^2$ je spojitá na $(-\infty, \infty)$ no nie je tam ohraničená.

c) Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pre } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \end{cases}$$

je definovaná na uzavretom intervale $\langle 0, 1 \rangle$, ale na tomto intervale nie je spojitá a nie je ohraničená.

Veta 3.9.5. [Weierstrassova o minime a maxime] Nech funkcia f je definovaná a spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkcia f nadobúda na $\langle a, b \rangle$ svoje maximum a minimum (to znamená existujú body $c, d \in \langle a, b \rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$).

Dôkaz. Keďže f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ je, podľa vety 3.9.3, ohraničená na $\langle a, b \rangle$ a existujú $M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$, $m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$. Chceme ukázať, že existujú čísla $c, d \in \langle a, b \rangle$ také, že $f(c) = m$, $f(d) = M$.

Dôkaz urobíme pre maximum. Predpokladajme, že neexistuje také d . Potom pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) < M$ odkiaľ $M - f(x) > 0$. Keďže $M - f(x)$ je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b \rangle$ je aj funkcia $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ (veta 3.8.6 a definícia 3.9.1). Podľa vety 3.9.3 je funkcia g ohraničená na $\langle a, b \rangle$, to znamená

$$\exists K > 0 \forall x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow 0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < K,$$

odkiaľ vyplýva

$$f(x) < M - \frac{1}{K} < M \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle,$$

čo je spor s vlastnosťou suprema. Preto existuje $d \in \langle a, b \rangle$ také, že $f(d) = M$.

Analogicky sa urobí dôkaz v prípade minima. □

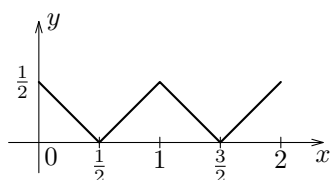
Veta nerieši otázku o počte bodov, v ktorých má spojitá funkcia najväčšiu (najmenšiu) hodnotu, ani otázku nájdenia extrémov.

Napr. funkcia $f(x) = |x - [x] - \frac{1}{2}|$ má na intervale $\langle 0, 2 \rangle$ najväčšiu hodnotu $\frac{1}{2}$ v bodoch 0, 1, 2 a najmenšiu hodnotu 0 v bodoch $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (obr.31).

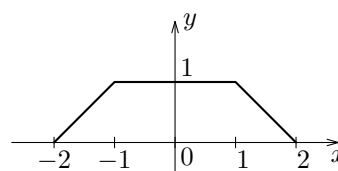
Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{pre } -2 \leq x < -1, \\ 1 & \text{pre } -1 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{pre } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

je spojitá na intervale $\langle -2, 2 \rangle$, nadobúda minimálnu hodnotu 0 v bodoch $-2, 2$, maximálnu hodnotu 1, pritom $f(x) = 1$ na $\langle -1, 1 \rangle$ (obr.32).



obr.31

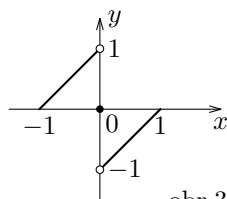


obr.32

Nasledujúci príklad ilustruje, že aj vo vete 3.9.5 obidva predpoklady zohrávajú dôležitú úlohu.

Príklad 3.9.6. a) Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pre } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ x - 1 & \text{pre } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$



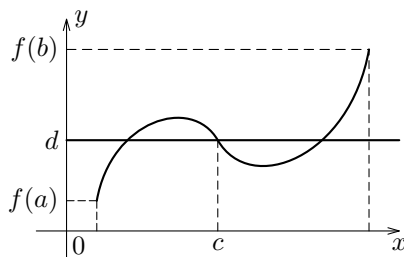
obr.33

je nespojitá na $\langle -1, 1 \rangle$. Má supremum rovné 1, infimum -1 , avšak $f(x) \neq 1$ a $f(x) \neq -1$ pre každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ (obr.33).

b) Funkcia $f(x) = x^2$ je spojitá na otvorenom intervale $(0, 1)$ a nenadobúda svoje infimum, ktoré je rovné 0 a svoje supremum, ktoré je rovné 1 ($0 < f(x) < 1$ pre každé $x \in (0, 1)$).

Veta 3.9.7. [Darbouxova¹⁰] Nech funkcia f je definovaná a spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \neq f(b)$. Potom ku každému číslu d ležiacemu medzi hodnotami $f(a)$, $f(b)$ existuje aspoň jeden bod $c \in \langle a, b \rangle$ taký, že $f(c) = d$ (obr.34).

¹⁰Jean Gaston Darboux (1842–1917), francúzsky matematik, profesor na Univerzite v Sorbone.



obr.34

Dôkaz. Podľa predpokladu $f(a) \neq f(b)$. Nech napr. $f(a) < f(b)$. Máme dokázať, že

$$\forall d \in \langle f(a), f(b) \rangle \exists c \in \langle a, b \rangle : f(c) = d.$$

Ak $d = f(a)$ stačí položiť $c = a$. Ak $d = f(b)$ položíme $c = b$. Vyšetříme teraz prípad $f(a) < d < f(b)$.

Definujme množinu $A = \{x : x \in \langle a, b \rangle \text{ a } f(x) < d\}$. Množina A je neprázdna ($a \in A$), ohraničená a preto podľa axiómy o supreme existuje $c = \sup A$, $c \in \langle a, b \rangle$. Ukážeme, že $f(c) = d$.

Nech $f(c) < d$. Funkcia f je spojitá v bode c sprava, t.j. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ a podľa vety 3.6.3 existuje $\delta > 0$ také, že $f(x) < d$ pre všetky $x \in \langle c, c + \delta \rangle$. Potom pre $\alpha \in (c, c + \delta) \cap \langle a, b \rangle$ je $f(\alpha) < d$ a teda $\alpha \in A$. To je však spor s tým, že $c = \sup A$.

Nech $f(c) > d$. Zo spojitosti funkcie f v bode c zľava, t.j. $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$, a podľa vety 3.6.3 existuje $\eta > 0$ také, že $f(x) > d$ pre všetky $x \in (c - \eta, c)$, čo je však opäť spor s tým, že $c = \sup A$.

Ostáva teda len možnosť $f(c) = d$. □

Veta 3.9.8. [Bolzanova] Nech funkcia f je definovaná a spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom funkcia f nadobúda v intervale $\langle a, b \rangle$ nulovú hodnotu (t.j. existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$).

Dôkaz. Keďže $f(a) \cdot f(b) < 0$ číslo $d = 0$ leží medzi hodnotami $f(a)$, $f(b)$ a podľa vety 3.9.7 existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$. □

Táto veta sa dá použiť na dôkaz existencie riešenia rovníc a na približné určenie riešenia rovníc.

Príklad 3.9.9. Zistíme, či rovnica $x^5 + x - 1 = 0$ má riešenie.

Riešenie. Funkcia $f(x) = x^5 + x - 1$ je spojitá na $\mathbb{R}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Podľa vety 3.9.8 existuje $c \in (0, 1)$, pre ktoré $f(c) = 0$, t.j. $c^5 + c - 1 = 0$.

Keď chceme bližšie určiť riešenie môžeme postupovať takto. Zoberme stred intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, t.j. $\frac{1}{2}$. Keďže $f(\frac{1}{2}) < 0$, $f(1) > 0$ podľa vety 3.9.8 leží riešenie v intervale $(\frac{1}{2}, 1)$. Môžeme pokračovať ďalej. Zoberme stred intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, t.j. $\frac{3}{4}$. Riešenie leží v intervale $(\frac{3}{4}, 1)$, pretože $f(\frac{3}{4}) < 0$, $f(1) > 0$. Takto môžeme pokračovať dovtedy, kým neurčíme riešenie s presnosťou akú potrebujeme. $\square$

Ďalším dôležitým dôsledkom vety 3.9.7 je nasledujúca veta.

Veta 3.9.10. *Množina hodnôt, ktoré spojitá funkcia nadobúda na intervale (ľubovoľného druhu) je jednoprvková množina alebo opäť interval.*

Dôkaz. Nech f je spojitá funkcia na intervale I a J je množina hodnôt funkcie f na intervale I .

Ak f je konštantná funkcia, t.j. $f(x) = c$ pre $x \in I$, je obor hodnôt jednoprvková množina $J = \{c\}$.

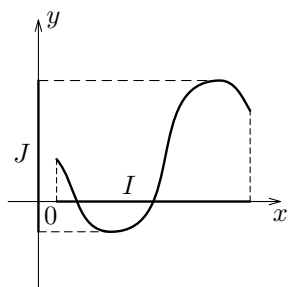
Ak f nie je konštantná funkcia, môžu nastať prípady:

1. J je ohraničená množina (obr.35),
2. J je množina ohraničená zdola, zhora neohraničená (obr.36),
3. J je množina ohraničená zhora, neohraničená zdola,
4. J je množina neohraničená ani zhora ani zdola (obr.37).

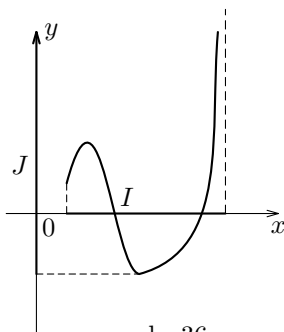
Nech nastane prípad 1). Potom existujú $\alpha = \inf J$ a $\beta = \sup J$. Ak $\alpha \in J$ i $\beta \in J$, t.j. existujú $c, d \in I$ také, že $\alpha = f(c) = \min_{x \in I} f(x)$, $\beta = f(d) = \max_{x \in I} f(x)$ a podľa vety 3.9.7 je potom $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ (obr.35). Ak nie je, napr. $\beta \in J$. Zoberme ľubovoľné $\alpha < \eta < \beta$. Keďže β je supremum, existuje číslo $y_1 \in J$ také, že $\eta < y_1 < \beta$ a ďalej existuje $y_2 \in J$ také, že $\alpha \leq y_2 < \eta$. To znamená, že existujú $x_1, x_2 \in I$ také, že $f(x_2) = y_2 < \eta < y_1 = f(x_1)$. Podľa vety 3.9.7 existuje $\xi \in I$ také, že $f(\xi) = \eta$, t.j. $\eta \in J$. To znamená, že $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ alebo $J = (\alpha, \beta)$ podľa toho, či $\alpha \in J$ alebo $\alpha \notin J$.

Nech nastane prípad 2), potom existuje $\alpha = \inf J$. Nech η je ľubovoľné číslo väčšie ako α . Keďže množina J nie je zhora ohraničená, existuje $y_1 \in J$, $y_1 > \eta$. Z toho, že $\alpha = \inf J$ vyplýva, že existuje $y_2 \in J$ také, že $\alpha < y_2 < \eta$. To znamená, že existujú $x_1, x_2 \in I$ také, že $f(x_2) = y_2 < \eta < y_1 = f(x_1)$ a podľa vety 3.9.7 je $\eta \in J$. Preto $J = \langle \alpha, \infty \rangle$ alebo $J = (\alpha, \infty)$ podľa toho, či $\alpha \in J$ alebo $\alpha \notin J$ (obr.36).

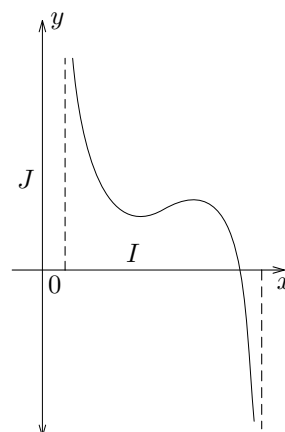
Prípady 3) a 4) sa dokážu analogicky.



obr.35



obr.36



obr.37

□

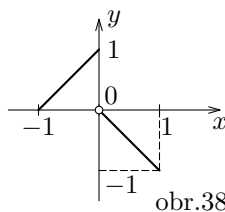
Príklad 3.9.11. a) Obor hodnôt funkcie $f(x) = x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ je interval $\langle 0, \infty \rangle$. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x^{2n} \geq 0 = f(0)$. Funkcia f má v bode 0 minimum rovné 0. Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ je funkcia f neohraničená zhora na $\mathbb{R}$. Ďalej je funkcia $f(x) = x^{2n}$ spojitá na $\mathbb{R}$ a preto jej obor hodnôt je interval a bude to $\langle 0, \infty \rangle$.

b) Obor hodnôt funkcie $f(x) = x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ je interval $(-\infty, \infty)$. Funkcia $f(x) = x^{2n+1}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, preto jej obor hodnôt bude interval. Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n+1} = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$ nie je ohraničená ani zhora ani zdola. Preto je oborom hodnôt interval neohraničený zdola, neohraničený zhora, t.j. $(-\infty, \infty)$.

Všimnime si, že vlastnosť „nadobúdať ľubovoľnú hodnotu medzi dvoma hodnotami“ nie je charakteristickým znakom spojitosti funkcie. Ukazuje to nasledujúci príklad.

Príklad 3.9.12. Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pre } -1 \leq x \leq 0 \\ -x & \text{pre } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



Je definovaná na intervale $\langle -1, 1 \rangle$, nie je na ňom spojitá lebo nie je spojitá v bode 0, má najväčšiu hodnotu $1 = f(0)$ a najmenšiu hodnotu $-1 = f(1)$ a oborom hodnôt je interval $\langle -1, 1 \rangle$ (obr.38).

Pre monotónne funkcie však platí veta.

Veta 3.9.13. *Nech funkcia f je definovaná a monotónna na intervale I a nech obor hodnôt funkcie f na intervale I je jednoprvková množina alebo interval. Potom funkcia f je spojitá na intervale I .*

Dôkaz. Urobíme ho pre prípad, keď f je neklesajúca na I a I je otvorený interval. Ostatné prípady sa dokážu podobne. Predpokladajme, že f nie je spojitá na I , t.j. existuje bod $a \in I$, v ktorom f nie je spojitá. V ľubovoľnom okolí $(a - \delta, a + \delta) \subset I$, vzhľadom na monotónnosť platí $f(a - \delta) \leq f(x) \leq f(a + \delta)$, $a - \delta < x < a + \delta$. Teda f je v δ -okolí bodu a ohraničená a na základe vety a cvičenia 7 článku 3.7 existujú $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a vzhľadom na nespojitosť funkcie f v bode a a monotónnosť $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Zvoľme číslo $c \neq f(a)$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < c < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Ak $x < a$, $x \in I$, tak z neklesajúcnosti funkcie f vyplýva, že $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < c$ a pre $x > a$, $x \in I$, z toho istého dôvodu, je $c < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(x)$. Pretože $f(a) \neq c$, nenadobúda funkcia f hodnotu c v žiadnom bode intervalu I . To je však spor s tým, že obor hodnôt funkcie f na intervale I je interval. $\square$

Dôležitou vlastnosťou, ktorá súvisí so spojitosťou, je rovnoramenná spojitosť. Vieme, že funkcia je spojitá na množine M , ak je spojitá v každom bode x_0 tejto množiny. Teda, ak zoberieme $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in M : |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Uvedomme si, že číslo $\delta > 0$, ktoré existuje ku číslu ε , závisí aj od toho, ktorý bod $x_0 \in M$ zvolíme. Vzniká otázka, či možno k danému $\varepsilon > 0$ zvoliť $\delta > 0$ tak, aby bolo spoločné pre všetky body $x_0 \in M$. Nasledujúci príklad ukazuje, že to tak nemusí byť vždy.

Príklad 3.9.14. Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je na intervale $(0, 1)$ spojitá. Nech $\varepsilon > 0$. Chceme nájsť $\delta > 0$ tak, aby pre každé $x : |x - x_0| < \delta$ platilo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bez ohľadu na to, ako zvolíme bod $x_0 \in (0, 1)$. Pripustíme, že také $\delta > 0$ existuje. Zvoľme bod $x_0 \in (0, 1)$, $x_0 < \delta$ a ďalej zvoľme bod $x \in (0, 1)$, $x < \delta$ tak, aby $\frac{1}{x} > \frac{1}{x_0} + \varepsilon$. Také x vždy existuje, teda $|x - x_0| < \delta$ ale $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| > \varepsilon$.

To znamená, že sa nedá nájsť $\delta > 0$ nezávislé od bodu $x_0 \in (0, 1)$ tak, aby bolo spoločné každému $\varepsilon > 0$ pre všetky $x_0 \in (0, 1)$.

Definícia 3.9.15. Nech funkcia f je definovaná na množine M . Hovoríme, že f je **rovnomerne spojitá na M** , ak pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že pre všetky $x_1, x_2 \in M$, $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (obr.39).

Príklad 3.9.14 ukazuje, že funkcia f môže byť spojitá na M , ale nemusí byť rovnomerne spojitá na M . Platí však veta.

Veta 3.9.16. *Nech f je rovnomerne spojitá na M , potom je f spojitá na M .*

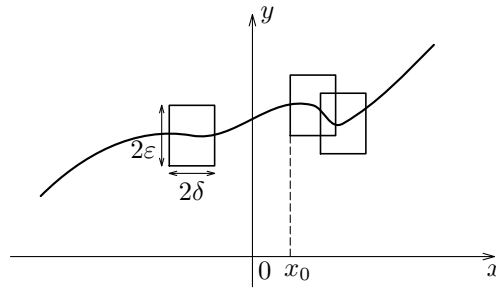
Dôkaz. Chceme dokázať spojitosť funkcie f v ľubovoľnom bode $x_0 \in M$. To znamená, že chceme dokázať

$$\forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (3.46)$$

Vieme, že f je rovnomerne spojitá na množine M , t.j.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in M : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Tým skôr, ak zoberieme x_1 pevne, $x_1 = x_0$, bude pre každé $x = x_2$, pre ktoré $|x - x_0| < \delta$ platiť $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, t.j. platí (3.46). $\square$



obr.39

Ak množina M je uzavretý interval $\langle a, b \rangle$ možno vetu 3.9.16 obrátiť.

Veta 3.9.17. *Nech funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$, potom f je rovnomerne spojitá na $\langle a, b \rangle$.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme nepriamo. Nech funkcia f nie je rovnomerne spojitá na $\langle a, b \rangle$. To znamená, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ také, že pre všetky $\delta > 0$ teda aj $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ existujú $x_n, y_n \in \langle a, b \rangle$ také, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (3.47)$$

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a podľa Bolzanovej–Weierstrassovej vety (veta 2.6.7) sa z tejto postupnosti dá vybrať postupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Použitím vlastností absolútnych hodnôt dostaneme

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0|. \quad (3.48)$$

Pravá strana (3.48) konverguje ku 0 pre $k \rightarrow \infty$ a tak aj $y_{n_k} \rightarrow x_0$ pre $k \rightarrow \infty$. Keďže funkcia f je spojitá v bode x_0 , tak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(x_0).$$

Položme v (3.47) $n = n_k$, dostaneme $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$. Ak prejdeme v tejto nerovnosti k limite pre $k \rightarrow \infty$ máme

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Tento spor dokazuje, že funkcia f musí byť rovnomerne spojitá na $\langle a, b \rangle$. $\square$

Príklad 3.9.18. a) Dokážme, že funkcia $f(x) = x^2$ je rovnomerne spojitá na intervale $(-\ell, \ell)$, $\ell > 0$.

Zoberme ε ľubovoľné kladné číslo a k nemu $\delta = \frac{\varepsilon}{2\ell}$, potom pre každé x_1, x_2 také, že $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2\ell} = \delta$ platí

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| < 2\ell|x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

b) Funkcia $f(x) = x^2$ nie je rovnomerne spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$. Zoberme $\varepsilon_0 < 2$, pre každé δ aj $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots$ existujú body $x_1 = n + \frac{1}{n}$, $x_2 = n$, $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \delta$ a

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 > \varepsilon_0.$$

Nasledujúce vety sa týkajú existencie a spojitosti inverznej funkcie. Sú dôležitým východiskom k zavedeniu celého radu funkcií a ku štúdiu ich vlastností.

Veta 3.9.19. *Nech funkcia f je spojitá na intervale I . Funkcia f má inverznú funkciu $\bar{f}$ práve vtedy, ak f je rýdzomonotónna.*

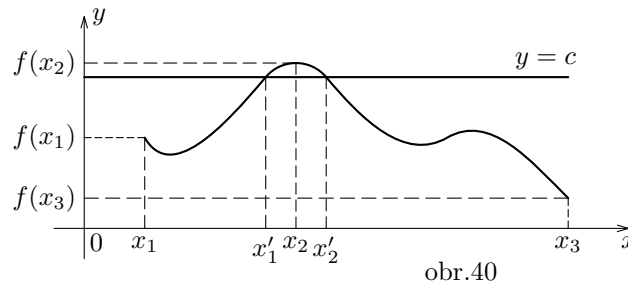
Dôkaz. a) Postačujúca podmienka je dokázaná vo vete 3.4.4.

b) Nutná podmienka. Nech funkcia f nie je monotónna, potom existujú

$$x_1, x_2, x_3 \in I, \quad x_1 < x_2 < x_3, \quad \text{že } f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_2) > f(x_3) \quad (3.49)$$

$$\text{alebo } f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_2) < f(x_3). \quad (3.50)$$

Predpokladajme, že nastane prípad (3.49). Zvoľme akékoľvek číslo c vyhovujúce nerovnostiam $f(x_1) < c < f(x_2)$ a $f(x_3) < c < f(x_2)$ (obr.40). Podľa vety 3.9.7 existuje $x'_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ taký, že $f(x'_1) = c$ a zároveň existuje $x'_2 \in \langle x_2, x_3 \rangle$ taký, že $f(x'_2) = c$. Obidva body $x'_1, x'_2, x'_1 \neq x'_2$ sa zobrazujú do toho istého bodu c a preto inverzná funkcia neexistuje.



obr.40

Ak monotónna funkcia f , spojitá na intervale I , nie je rýdzomonotónna, má intervaly, v ktorých je konštantná, t.j. $f(x) = c$ pre $x \in \langle x_1, x_2 \rangle \subset I$. V tom prípade funkcia f tiež nemá inverznú funkciu. $\square$

Veta 3.9.20. *Nech funkcia f je spojitá, rýdzomonotónna, definovaná na intervale I . Potom inverzná funkcia $\bar{f}$ je rýdzomonotónna a spojitá.*

Dôkaz. Podľa vety 3.4.4 je inverzná funkcia $\bar{f}$ rýdzomonotónna. Podľa vety 3.9.10 je obor hodnôt funkcie f interval J , ktorý je definičným oborom inverznej funkcie $\bar{f}$. Oborom hodnôt inverznej funkcie $\bar{f}$ je však interval I a tak podľa vety 3.9.13 je inverzná funkcia $\bar{f}$ spojitá na J . $\square$

Príklad 3.9.21. a) Funkcia $f(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ je spojitá, rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, \infty)$ (príklad 3.9.11). Podľa viet 3.9.19 a 3.9.20 má inverznú funkciu $\bar{f}(x) = x^{1/(2n+1)}$, ktorá je spojitá a rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$.

b) Funkcia $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ je spojitá, rastúca na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \infty \rangle$. Podľa viet 3.9.19 a 3.9.20 má inverznú funkciu $\bar{f}(x) = x^{1/2n}$, ktorá je spojitá, rastúca na intervale $\langle 0, \infty \rangle$.

c) Funkcia $f(x) = x^r$, $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ je spojitá na $\langle 0, \infty \rangle$, lebo je to zložená funkcia zo spojitých funkcií x^m , $x^{1/n}$.

Cvičenie

1. Zistite, či rovnica $x^{12} - x^7 + 13x^6 - 1 = 0$ má riešenie.

2. Nájdite príklad funkcie definovanej a ohraničenej na intervale $\langle -1, 1 \rangle$, ktorá nenaobúda svoju najmenšiu a najväčšiu hodnotu.
3. Zostrojte:
 - a) spojitú funkciu f definovanú na $\mathbb{R}$ tak, aby jej obor hodnôt bol interval $(-1, 1)$.
 - b) spojitú funkciu f , ktorá zobrazuje interval (a, b) na interval $\langle a, b \rangle$. Je možné nájsť funkciu f tak, aby bola prostá?
4. Dokážte, že funkcia spojitá na $\mathbb{R}$ a rovná nule v každom racionálnom čísle je rovná nule na celom $\mathbb{R}$.
5. Nech f je spojitá funkcia a zobrazuje interval $\langle 0, 1 \rangle$ na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Potom existuje bod $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $f(x_0) = x_0$. Dokážte.
6. Nech f, g sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$, f je rastúca, g je klesajúca. Nech $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. Potom existuje práve jedno $x \in (a, b)$ také, že $f(x) = g(x)$. Dokážte.
7. Nech funkcia f je spojitá na $\langle 0, \infty \rangle$ a nech existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Potom funkcia f nado-
búda v intervale $\langle 0, \infty \rangle$ svoje minimum alebo maximum. Dokážte. Uveďte príklady k tomuto tvrdeniu.

3.10 Elementárne funkcie

Cieľom tejto časti je oboznámiť sa s najčastejšie používanými funkciami a ich základnými vlastnosťami ako sú definičný obor, spojitosť, monotónnosť, párnosť, periodičnosť a niektoré asymptotické vlastnosti.

Základnými elementárnymi funkciami budeme nazývať tieto funkcie: konštantná funkcia, mocninová funkcia s prirodzeným exponentom, polynóm, racionálna funkcia, mocninová funkcia (resp. mocnina s reálnym exponentom), exponenciálna funkcia, logaritmická funkcia, goniometrické funkcie, cyklometrické funkcie, hyperbolické funkcie a hyperbolometrické funkcie.

Elementárnou funkciou budeme nazývať každú funkciu, ktorá vznikne z konečného počtu základných elementárnych funkcií pomocou konečného počtu základných operácií (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie) a tvorenia zložených funkcií.

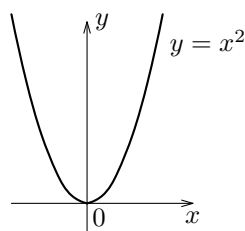
3.10.1 Konštantná funkcia

Funkciu, ktorá každému $x \in \mathbb{R}$ priradí to isté číslo $c \in \mathbb{R}$, nazývame **konštantnou funkciou** alebo konštantou. Použitím definícií jednotlivých vlastností sa ľahko overí, že kon-

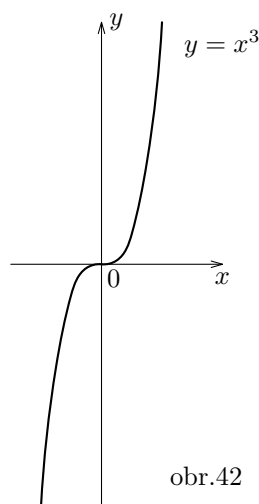
štantná funkcia je spojitá na $(-\infty, \infty)$, je párna, periodická. Jej graf je priamka rovnobežná s x -ovou osou.

3.10.2 Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom

V kapitole 1 sme definovali mocninu s prirodzeným exponentom (definícia 1.6.1). **Mocninovú funkciu** s prirodzeným exponentom $f(x) = x^n$, kde n je pevné prirodzené číslo, $x \in \mathbb{R}$ získame tak, že v mocnine s prirodzeným exponentom ponecháme exponent pevný a základ mocniny budeme považovať za premennú veličinu. Vlastnosti tejto funkcie sme postupne vyšetrovali, takže ich teraz iba zhrnieme.



obr.41



obr.42

- a) $D(f) = (-\infty, \infty)$,
- b) $H(f) = (-\infty, \infty)$ pre n -nepárne a $H(f) = \langle 0, \infty \rangle$ pre n -párne (príklad 3.9.11),
- c) je spojitá na $(-\infty, \infty)$ (príklad 3.8.7),
- d) je párna pre n -párne, nepárna pre n -nepárne,
- e) pre n párne je rastúca na intervale $\langle 0, \infty \rangle$, klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$;
pre n nepárne je rastúca na intervale $(-\infty, \infty)$ (príklad 3.3.12),
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ (príklad 3.7.8c),
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } n\text{-párne} \\ -\infty & \text{pre } n\text{-nepárne} \end{cases}$
(ukáže sa pomocou párnosti, resp. nepárnosti funkcie x^n a vlastnosti f)).

3.10.3 Polynóm

Funkcia tvaru

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (3.51)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sú reálne čísla, $n \in \mathbb{N}$ nazývame **polynóm**. Je definovaná a spojitá na $(-\infty, \infty)$ (príklad 3.8.7). Najvyššiu mocninu x , pri ktorej je nenulový činiteľ, nazývame **stupňom polynómu**. Teda, ak $a_0 \neq 0$, je polynóm P n -tého stupňa, konštantná funkcia je polynóm nultého stupňa. **Nulovým bodom** alebo **koreňom polynómu** nazývame také reálne číslo c , pre ktoré $P(c) = 0$. Z algebry vieme, že c je koreňom polynómu P práve vtedy, ak existuje polynóm R taký, že platí $P(x) = (x - c) \cdot R(x)$. Číslo c je **k-násobným** ($k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$) **koreňom polynómu P** práve vtedy, ak $P(x) = (x - c)^k \cdot Q(x)$, kde Q je polynóm a $Q(c) \neq 0$. Polynóm stupňa n má najviac n koreňov. To znamená, že ak c je koreňom nenulového polynómu P , potom existuje okolie $O(c)$ bodu c , že v ňom je číslo c jediným koreňom toho polynómu. Dva **polynómy sa rovnajú**, ak sú rovnakého stupňa a koeficienty pri rovnakých mocninách x sa v oboch polynómoch zhodujú. Nasledujúca veta hovorí, kedy sa dva polynómy rovnajú.

Veta 3.10.1. *Ak dva polynómy majú tie isté hodnoty v číslach, ktorých počet je väčší ako ich stupne, potom sa polynómy rovnajú.*

Dôkaz. Nech $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $R(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, $b_0 \neq 0$. Označme $p = \max\{n, m\} + 1$. Nech $c_1, c_2, \dots, c_p$ sú navzájom rôzne čísla, pre ktoré $P(c_1) = R(c_1)$, $P(c_2) = R(c_2), \dots, P(c_p) = R(c_p)$. Rozdiel $Q = P - R$ je buď nulový polynóm alebo polynóm stupňa najviac $p - 1$ a $Q(c_i) = 0$, $i = 1, \dots, p$. Keďže polynóm stupňa $p - 1$ môže mať najviac $p - 1$ koreňov je rozdiel $P - R$ nulový polynóm. Z toho, ako tvoríme rozdiel polynómov je zrejmé, že $P - R$ je nulový polynóm len ak $n = m$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. $\square$

Asymptotické vlastnosti polynómu charakterizuje veta.

Veta 3.10.2. *Nech $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ je polynóm stupňa $n \geq 1$. Potom platí:*

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$ pre n -párne, $a_0 > 0$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ pre n -párne, $a_0 < 0$;
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ pre n -nepárne, $a_0 > 0$;
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$ pre n -nepárne, $a_0 < 0$;

Dôkaz. Nech n je párne prirodzené číslo. Pre každé $x \neq 0$ platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = \frac{a_0 + a_1\frac{1}{x} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}.$$

Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 + a_1\frac{1}{x} + \dots + a_n\frac{1}{x^n}) = a_0 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ a $\frac{1}{x^n} > 0$ pre každé $x \neq 0$ podľa vety 3.7.16 dostávame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n) = \infty, \text{ ak } a_0 > 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n) = -\infty, \text{ ak } a_0 < 0.$$

Ostatné prípady sa dokážu podobne. □

3.10.4 Racionálna funkcia

Racionálnou funkciou nazývame funkciu $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q sú polynómy (príklad 3.2.2). Je definovaná a spojitá v každom $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré $Q(x) \neq 0$ (príklad 3.8.7).

Ak je stupeň polynómu v čitateli menší ako stupeň polynómu v menovateli, nazývame funkciu f **rýdzoracionálnou funkciou**. Každú inú racionálnu funkciu nazývame **nerýdzoracionálnou funkciou**.

Ak v nerýdzoracionálnej funkcii čiastočne vydelíme P, Q tak, aby zvyšok Z bol buď nulový polynóm alebo polynóm, ktorého stupeň je menší ako stupeň polynómu Q , potom platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Z(x)}{Q(x)} + R(x),$$

kde $R(x)$ je polynóm. Racionálna funkcia $\frac{Z}{Q}$ je rýdzoracionálna. Teda každú racionálnu funkciu môžeme napísať ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

Asymptotické vlastnosti racionálnej funkcie sú obsiahnuté v cvičeniach 2 a 4 článku 3.7. Zhrnieme ich výsledky. Označme n stupeň polynómu P a m stupeň polynómu Q . Potom

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ je

- a) nevlastná, ak $n > m$,
- b) vlastná, ak $n = m$,
- c) rovná 0, ak $n < m$.

Nech c je k -násobný koreň polynómu Q , $1 \leq k \leq m$. Potom $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{P(x)}{Q(x)}$ sú

- a) nevlastné, ak buď $P(c) \neq 0$ alebo c je koreň polynómu P násobnosti menšej ako k ;
- b) vlastné, ak c je koreň polynómu P násobnosti väčšej alebo rovnjej k .

3.10.5 Mocninová funkcia

V prvej kapitole sme definovali mocninu s reálnym exponentom a^α , $a > 0$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$ (definícia 1.11.1). **Mocninovú funkciu**

$$f(x) = x^\alpha$$

získame z definície mocniny s reálnym exponentom tak, že ponecháme α pevné a základ budeme považovať za premennú veličinu. Z toho vyplýva, že definičným oborom mocninnej funkcie je:

- a) interval $\langle 0, \infty \rangle$, ak $\alpha > 0$;
- b) interval $(0, \infty)$, ak $\alpha < 0$;
- c) interval $(-\infty, \infty)$, ak $\alpha = 0$.

Z dokázaných vlastností mocniny (veta 1.11.11) priamo vyplýva monotónnosť mocninovej funkcie a to:

- a) je rastúca na $\langle 0, \infty \rangle$ pre $\alpha > 0$;
- b) je klesajúca na $(0, \infty)$ pre $\alpha < 0$;
- c) je konštantná na $(-\infty, \infty)$ pre $\alpha = 0$.

Mocninová funkcia je spojitá na svojom definičnom obore. Vyplýva to z nasledujúcej lemy a definície spojitosti funkcie (vzťah (3.40)).

Lema 3.10.3. *Nech číslo $a > 0$ a $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť, ktorej členy sú kladné čísla a konverguje k číslu a . Potom pre každé číslo α platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$.*

Dôkaz. Pre $\alpha = 0$ je to zrejmé, pretože postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{1\}_{n=1}^\infty$.

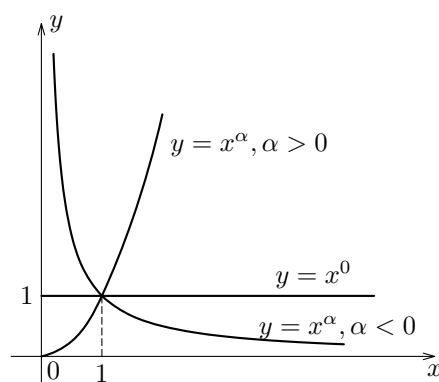
Nech $\alpha \neq 0$ a ε je ľubovoľné kladné číslo. Zvoľme $\varepsilon_1 > 0$ také, že $\varepsilon_1 < \min\{a^\alpha, \varepsilon\}$. Označme $c_1 = (a^\alpha - \varepsilon_1)^{1/\alpha}$, $c_2 = (a^\alpha + \varepsilon_1)^{1/\alpha}$. Potom platí, vzhľadom na monotónnosť mocninovej funkcie, že $c_1 < a < c_2$ ak $\alpha > 0$, $c_2 < a < c_1$ ak $\alpha < 0$. Označme $\delta = \min\{|a - c_1|, |a - c_2|\}$. Zrejme je $\delta > 0$. Keďže postupnosť $a_n \rightarrow a$ pre $n \rightarrow \infty$, k tomuto $\delta > 0$ existuje číslo n_0 také, že pre každé $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a| < \delta$, čiže $a - \delta < a_n < a + \delta$. Pre $\alpha > 0$ platí $c_1 \leq a - \delta < a_n < a + \delta \leq c_2$ a pre $\alpha < 0$ platí $c_2 \leq a - \delta < a_n \leq c_1$. Teraz pre $n > n_0$ platí $a^\alpha - \varepsilon < a^\alpha - \varepsilon_1 = c_1^\alpha < a_n^\alpha < c_2^\alpha = a^\alpha + \varepsilon_1 < a^\alpha + \varepsilon$, ak $\alpha > 0$ a tiež ak je $\alpha < 0$. Ukázali sme, že pre každé $n > n_0$ v oboch prípadoch ($\alpha > 0$, $\alpha < 0$) platí $a^\alpha - \varepsilon < a_n^\alpha < a^\alpha + \varepsilon$. To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$. $\square$

Dôkazy nasledujúcich limit prenecháme čitateľovi.

$$\text{Ak je } \alpha > 0 \text{ platí } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty. \quad (3.52)$$

$$\text{Ak je } \alpha < 0 \text{ platí } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = 0. \quad (3.53)$$

Keďže $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ je spojitá funkcia na svojom definičnom obore, je jej obor hodnôt interval (veta 3.9.10). Vzhľadom na monotónnosť tejto funkcie a limity v (3.52), (3.53) je pre $\alpha > 0$ obor hodnôt interval $\langle 0, \infty \rangle$ a pre $\alpha < 0$ interval $(0, \infty)$.



obr.43

3.10.6 Exponenciálna funkcia

Podobne ako mocninovú funkciu aj **exponenciálnu funkciu**

$$f(x) = a^x$$

získame z definície mocniny s reálnym exponentom (definícia 1.11.1), ak ponecháme základ a , $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ pevný a exponent budeme považovať za premennú veličinu. Z toho vyplýva, že definičným oborom exponenciálnej funkcie je $(-\infty, \infty)$.

Monotónnosť exponenciálnej funkcie vyplýva z vety 1.11.11 a to:

- a) pre $a > 1$ je rastúca na $(-\infty, \infty)$;
- b) pre $0 < a < 1$ je klesajúca na $(-\infty, \infty)$.

K dôkazu spojitosti exponenciálnej funkcie budeme potrebovať nasledujúcu lemu.

Lema 3.10.4. *Nech je daná postupnosť racionálnych čísel $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúca k nule. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$, $a > 0$.*

Dôkaz. Prepokladajme, že $a > 1$. Z príkladu 2.3.2 a vlastnosti mocnín vieme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1$, to znamená k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ také, že

$$1 - \varepsilon < a^{-1/m} < a^{1/m} < 1 + \varepsilon. \quad (3.54)$$

Keďže $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, k číslu m existuje číslo n_0 také, že pre všetky $n > n_0$ platí $|r_n| < \frac{1}{m}$, t.j. $-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}$. Potom však

$$a^{-1/m} < a^{r_n} < a^{1/m},$$

a tak z (3.54) máme

$$1 - \varepsilon < a^{r_n} < 1 + \varepsilon \text{ pre všetky } n > n_0.$$

To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$.

Nech $0 < a < 1$. Označme $b = \frac{1}{a} > 1$. Potom pomocou vety 2.3.6 a už dokázaného tvrdenia máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} \right)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{r_n}} = 1.$$

□

Veta 3.10.5. *Exponenciálna funkcia je spojitá na $\mathbb{R}$.*

Dôkaz. Nech c je ľubovoľný bod z intervalu $(-\infty, \infty)$. Chceme ukázať, že $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$. Dokážeme najprv, že $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, $a > 1$. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Vzhľadom na vlastnosti reálnych čísel (veta 1.10.3) existujú postupnosti racionálnych čísel $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujúce k nule a také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n}, \text{ odkiaľ } a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}.$$

Podľa lemy 3.10.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$. Z poslednej nerovnosti vzhľadom na vetu 3.5.1 dostávame, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$. Pre $0 < a < 1$ je tiež $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. Položme $b = \frac{1}{a} > 1$. Vzhľadom na vety o limitách platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{b} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b^x} = 1.$$

Nech teraz $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľný bod. Chceme ukázať, že $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$, čo je ekvivalentné s tým, že $\lim_{x \rightarrow c} (a^x - a^c) = 0$. Použitím vety o limite súčinu (veta 3.6.9) a limite zloženej funkcie (veta 3.6.15) dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow c} (a^x - a^c) = \lim_{x \rightarrow c} a^c (a^{x-c} - 1) = \lim_{x \rightarrow c} a^c \cdot \lim_{x \rightarrow c} (a^{x-c} - 1) = a^c \cdot 0 = 0.$$

□

Veta 3.10.6. Pre $a > 1$ je $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Pre $0 < a < 1$ je $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$. Oborom hodnôt exponenciálnej funkcie je interval $(0, \infty)$ pre $a \neq 1$.

Dôkaz. Urobíme dôkaz pre $a > 1$. Pre $0 < a < 1$ využijeme opäť vlastnosť, že $a = \frac{1}{b}$, kde $b > 1$.

Keďže $a > 1$, tak sa dá zapísať ako $a = 1 + h$, $h > 0$. Z nerovnosti $x \geq [x] > x - 1$ a monotónnosti funkcie a^x máme

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + h)^{[x]} > h[x] > h(x - 1).$$

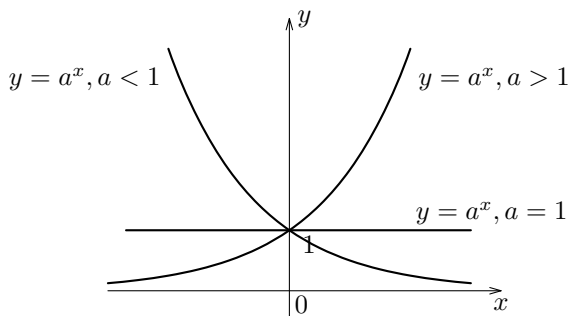
Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x - 1) = \infty$, z poslednej nerovnosti vyplýva, že $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$.

Na dôkaz toho, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ použijeme rovnosť $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ pre $x < 0$ a vetu o limite zloženej funkcie

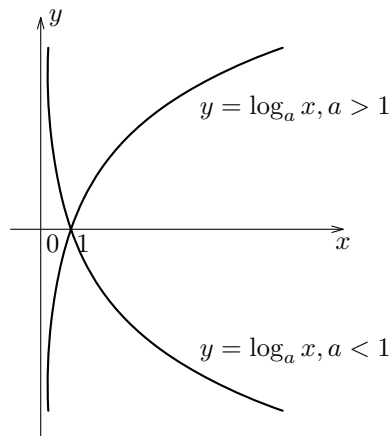
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{a^z} = 0.$$

Potrebuje ešte ukázať, že obor hodnôt je interval $(0, \infty)$. Že je to interval, vyplýva z vety 3.9.10. Je to interval zhora neohraničený, lebo $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ pre $a > 1$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ pre $0 < a < 1$. Je to interval zdola ohraničený nulou, lebo $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ a a^x je klesajúca pre $0 < a < 1$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ a a^x je rastúca pre $a > 1$. Teda oborom hodnôt je interval $(0, \infty)$. $\square$

Keď za základ zoberieme číslo e (príklad 2.5.6) dostaneme špeciálny prípad exponenciálnej funkcie. Funkciu $f(x) = e^x$ nazývame exponenciálnou funkciou s prirodzeným základom.



obr.44



obr.45

3.10.7 Logaritmická funkcia

V prvej kapitole sme definovali logaritmus čísla x pri základe $a - \log_a x$, kde $a, x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ (definícia 1.12.1). Pri pevnom a ($a > 0$, $a \neq 1$) je $\log_a x$ funkciou premennej x , ktorá je definovaná na intervale $(0, \infty)$.

Vráťme sa k funkcii $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Táto funkcia je spojitá a buď rastúca (pre $a > 1$) alebo klesajúca (pre $0 < a < 1$) na intervale $(-\infty, \infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $(0, \infty)$. To znamená, že ku každému $y \in (0, \infty)$ existuje $x \in (-\infty, \infty)$ tak, že $a^x = y$; stačí položiť $x = \log_a y$. Podľa definície inverznej funkcie (definícia 3.4.1) je vlastne funkcia $\varphi(y) = \log_a y$ inverznou funkciou k funkcii $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Podľa viet o inverzných funkciách (vety 3.4.4, 3.9.20) a vlastností exponenciálnej funkcie a^x má logaritmická funkcia nasledujúce vlastnosti:

1. je definovaná na $(0, \infty)$ a obor hodnôt má interval $(-\infty, \infty)$,
2. je spojitá na $(0, \infty)$,
3. je rastúca, ak $a > 1$ a klesajúca, ak $0 < a < 1$,
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ pre $a > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$ pre $0 < a < 1$.

Špeciálnym prípadom logaritmickej funkcie je logaritmická funkcia pri základe e . Použíame pre ňu označenie $\ln x$ a nazývame ju logaritmickou funkciou s prirodzeným základom.

3.10.8 Goniometrické funkcie

Goniometrickými funkciami nazývame funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$. Keďže ich definície a niektoré vlastnosti sa preberajú v matematike strednej školy, v tejto časti si to krátko zopakujeme a doplníme o ďalšie poznatky.

Definícia goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku je založená na podobnosti trojuholníkov. Ak sú dva trojuholníky ACB , $A'C'B'$ podobné, ich strany sú úmerné, teda (obr.46)

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|}, \quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}, \quad \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|},$$

To umožňuje definovať goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku. Ak označíme $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, potom

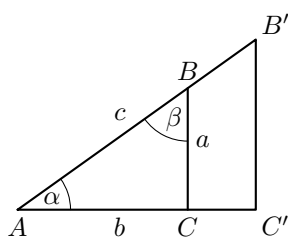
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a},$$

kde uhol α je meraný v stupňovej miere, $0 < \alpha < 90^\circ$.

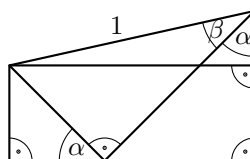
Z tejto definície a vlastností pravouhlého trojuholníka je zrejmé, že pre $0 < \alpha < 90^\circ$ platí:

- a) $\cos \alpha = \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha)$,
- b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,
- c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
- d) $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$,
- e) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

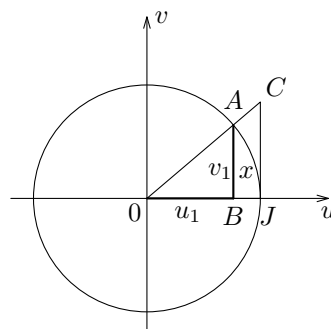
Platnosť súčtových vzorcov sa jednoducho dokáže geometricky. Napr. vzorec pre $\sin(\alpha + \beta)$ z obr.47.



obr.46



obr.47



obr.48

Uhol môžeme merať v „stupňovej“ alebo „oblúkovej“ miere, ktorá súvisí s dĺžkou oblúka jednotkovej kružnice. Každému uhlu $\angle JOA$ (obr.48) jednoznačne odpovedá oblúk $\widehat{JA}$ na jednotkovej kružnici. Oblúkovou mierou uhla $\angle JOA$ rozumieme dĺžku oblúka $\widehat{JA}$. Keďže dĺžka jednotkovej kružnice je 2π a celý kruh má 360° , ak označíme znakom α oblúkovú a znakom α° stupňovú mieru daného uhla, tak $\alpha/2\pi = \alpha^\circ/360$.

„Stotožnenie“ uhla s jeho oblúkovou mierou umožňuje pozeráť sa na goniometrické funkcie nie ako na funkcie, ktoré uhlu priradujú číslo, ale ako na funkcie, ktoré číslu (dĺžke určitého oblúka) priradujú číslo. Zostrojme jednotkovú kružnicu so stredom v bode $[0, 0]$. Súradnicové osi označme znakmi u, v (obr.48). Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Od bodu J nanessme na kružnici oblúk dĺžky $|x|$ a to proti smeru otáčania hodinových ručičiek, ak $x > 0$ a v smere otáčania, ak $x < 0$. Koncový bod tohto oblúka, bod A , má súradnice u_1, v_1 . Každému reálnemu číslu x je tak priradený bod – obraz na jednotkovej kružnici (obr.48). Teraz funkcie sínus, kosínus môžeme definovať takto:

Definícia 3.10.7. Sínus je funkcia definovaná na $(-\infty, \infty)$, ktorej hodnota v čísle x je súradnica v_1 obrazu čísla x na jednotkovej kružnici, $v_1 = \sin x$.

Kosínus je funkcia definovaná na $(-\infty, \infty)$, ktorej hodnota v čísle x je súradnica u_1 obrazu čísla x na jednotkovej kružnici, $u_1 = \cos x$.

Ak $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, jeho obraz na jednotkovej kružnici je v prvom kvadrante, majú funkcie $\sin x$, $\cos x$ ten istý význam ako bol zavedený v pravouhlom trojuholníku.

Poznámka. Spôsob, akým sme definovali funkcie $\sin x$, $\cos x$ je zatiaľ matematický nepresný, pretože predpokladá znalosť pojmu „dĺžka oblúka kružnice“, ktorý doteraz nemáme definovaný. Pri daných znalostiach nemáme prostriedky na to, aby sme mohli definovať pojem dĺžky oblúka krivky. (Budeme ho definovať neskôr.) Ak by sme mali tento pojem, sú definície funkcií $\sin x$, $\cos x$ v poriadku. Výhodou tohto spôsobu ich definície je jeho názornosť. Použitím definície 3.10.7 a geometrických úvah sa ľahko odvodí vlastnosti:

1. Funkcia $\sin x$ je nepárna, funkcia $\cos x$ je párna, to znamená, pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. (Obrazy čísel x , $-x$ na jednotkovej kružnici sú symetrické vzhľadom na os u .)
2. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. (Obrazy čísel x , $\frac{\pi}{2} - x$ sú symetrické vzhľadom na os prvého – tretieho kvadrantu.)
3. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
4. $\sin x > 0$ pre $x \in (0, \pi)$, $\sin x < 0$ pre $x \in (\pi, 2\pi)$,
 $\cos x > 0$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, $\cos x < 0$ pre $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi)$,
5. Ak $0 < x < \frac{\pi}{2}$, potom $0 < \sin x < x$.

Z obrázku 48 vidíme, že trojuholník AOB leží v kruhovom výseku AOJ , ktorý leží v trojuholníku COJ . Plochy týchto útvarov sú v poradí $\frac{1}{2} \sin x$, $\frac{x}{2}$, $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ ($|OJ| = 1$, $|AB| = \sin x$, $|CJ| = \operatorname{tg} x$) a tak $0 < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, odkiaľ

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{pre} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.55)$$

Pomocou analytickej geometrie sa dajú dokázať vzorce:

6.) Pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3.56)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3.57)$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (3.58)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (3.59)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (3.60)$$

Použitím týchto vlastností dokážeme ďalšie vlastnosti funkcií $\sin x$, $\cos x$.

Veta 3.10.8. *Funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú ohraničené na $\mathbb{R}$.*

Dôkaz. Zo vzťahu (3.58) bezprostredne vyplýva, že

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \quad (3.61)$$

□

Veta 3.10.9. *Funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú spojité na $\mathbb{R}$.*

Dôkaz. Chceme ukázať, že $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x+h) = \sin x$, $\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h) = \cos x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Použitím (3.59), (3.60), vety 3.10.8 a nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ pre $|x| < \frac{\pi}{2}$ (vyplýva z (3.55) vzhľadom na nepárnosť funkcií $\sin x$, x) máme pre $|h| < \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq |\sin(x+h) - \sin x| = 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \left| \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \right| \leq |h|,$$

$$0 \leq |\cos(x+h) - \cos x| = 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \left| \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \right| \leq |h|.$$

Z týchto nerovností dostávame $\lim_{h \rightarrow 0} (\sin(x+h) - \sin x) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} (\cos(x+h) - \cos x) = 0$, čo znamená, že funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú spojité v každom bode $x \in \mathbb{R}$.

□

Veta 3.10.10. *Funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú periodické s periódou 2π .*

Dôkaz. Položme vo vzťahu (3.59) $x = y + 2\pi$, kde y je ľubovoľné reálne číslo. Dostaneme $\sin(y + 2\pi) - \sin y = 2 \cos(y + \pi) \sin \pi = 0$, pretože $\sin \pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$. To znamená, že $\sin(y + 2\pi) = \sin y$ pre každé $y \in \mathbb{R}$. Funkcia $\sin x$ je periodická.

Chceme ukázať ešte, že $2\pi = T$ je jej periódou, t.j. že je najmenšie číslo T , pre ktoré platí $\sin(x + T) = \sin x$.

Číslo $T \neq \pi$, pretože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{3}{2}\pi = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi) = -1$ a tak nemôže platiť rovnosť $\sin(x + \pi) = \sin x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Ak by číslo T , $0 < T < 2\pi$, $T \neq \pi$ bolo periódou, potom $\sin T = \sin(0 + T) = \sin 0 = 0$, čo je spor. To znamená, periódou funkcie $\sin x$ je číslo 2π .

Aby sme ukázali periodičnosť funkcie $\cos x$, položíme vo vzťahu (60) $x = y + 2\pi$, kde $y \in \mathbb{R}$, ľubovoľné. Keďže $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$ (o tom sa ľahko presvedčíme, ak dosadíme do vzťahu (3.60) $x = y = \frac{\pi}{2}$, dostaneme $\cos \pi = -1$ a potom $x = y = \pi$) dostaneme $\cos(y + 2\pi) = \cos y \cos 2\pi = \cos y$.

Dôkaz toho, že číslo 2π je periódou funkcie $\cos x$ sa urobí podobne ako pre funkciu $\sin x$. □

Veta 3.10.11. Funkcia $\sin x$ je rastúca na každom intervale $\langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rangle$ a klesajúca na každom intervale $\langle (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcia $\cos x$ je rastúca na každom intervale $\langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle$ a klesajúca na každom intervale $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dôkaz. Vetu dokážeme pre funkciu $\sin x$. Podobne sa prevedie dôkaz pre $\cos x$. Vzhľadom na periodičnosť funkcie $\sin x$ sa obmedzíme na intervaly $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$. Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné reálne čísla také, že $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Potom $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ a $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ a tak $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$. Zo vzťahu (3.59) potom dostaneme

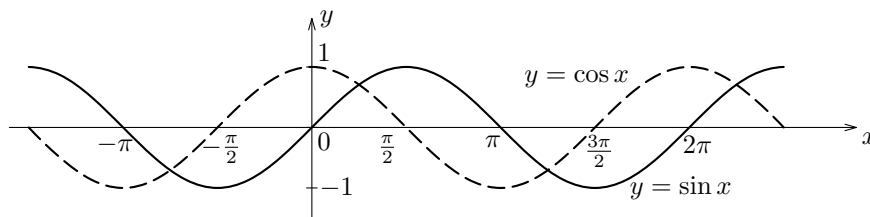
$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0,$$

teda $\sin x_2 > \sin x_1$. To znamená, že funkcia $\sin x$ je rastúca na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Nech teraz x_1, x_2 sú ľubovoľné reálne čísla také, že $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 < \frac{3}{2}\pi$. Potom platí $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 - \pi < x_2 - \pi < \frac{\pi}{2}$ a $\sin(x_1 - \pi) < \sin(x_2 - \pi)$ vzhľadom na už dokázanú rastúcosť $\sin x$. Keďže $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$ dostávame z poslednej nerovnice $\sin x_1 > \sin x_2$. To znamená, že funkcia $\sin x$ je klesajúca na intervale $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$. □

Veta 3.10.12. Obor hodnôt funkcií $\sin x$, $\cos x$ je interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Dôkaz. Funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú spojité, ohraničené a platí preň vzťah (3.61). Preto ich oborom hodnôt je interval $I \subset \langle -1, 1 \rangle$. Ale $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \in I$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1 \in I$, $\cos 0 = 1 \in I$, $\cos \pi = -1 \in I$, preto $I = \langle -1, 1 \rangle$. □



obr.49

Ďalšie vlastnosti goniometrických funkcií (goniometrické vzorce) by sme mohli odvodiť z doteraz uvedených vlastností.

Pomocou funkcií $\sin x$, $\cos x$ môžeme definovať ďalšie goniometrické funkcie.

Definícia 3.10.13. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Z definície funkcií $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, z vlastností funkcií $\sin x$, $\cos x$ použitím predchádzajúcich viet získame nasledujúce ich vlastnosti:

1. Funkcie $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ sú spojité v každom bode, v ktorom sú definované.

Tvrdenie vyplýva z vety 3.8.6 a 3.10.9.

2. Funkcie $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ sú periodické s periódou π .

Ukážeme tvrdenie pre $\operatorname{tg} x$. Z definície 3.10.13 a vzťahov (3.56), (3.57) dostaneme

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

$\operatorname{tg} x$ je periodická funkcia. Ďalej potrebujeme ukázať, že číslo $T = \pi$ je najmenšie kladné číslo, pre ktoré platí $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$. Číslo $T \neq \frac{\pi}{2}$, pretože $\frac{\pi}{2}$ nie je z definičného oboru funkcie $\operatorname{tg} x$. ($\operatorname{tg}(0 + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$). Ak by číslo T , $0 < T < \pi$, $T \neq \frac{\pi}{2}$ bolo periódou funkcie $\operatorname{tg} x$, potom $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$, čo je spor. To znamená, že $T = \pi$ je periódou funkcie $\operatorname{tg} x$.

Podobne sa dokáže tvrdenie pre funkciu $\operatorname{cotg} x$.

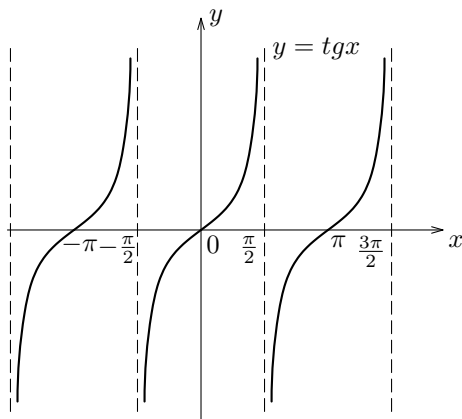
3. Funkcie $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ sú nepárne funkcie.

Tvrdenie vyplýva z definície 3.10.13, z párnosti funkcie $\cos x$ a nepárnosti funkcie $\sin x$.

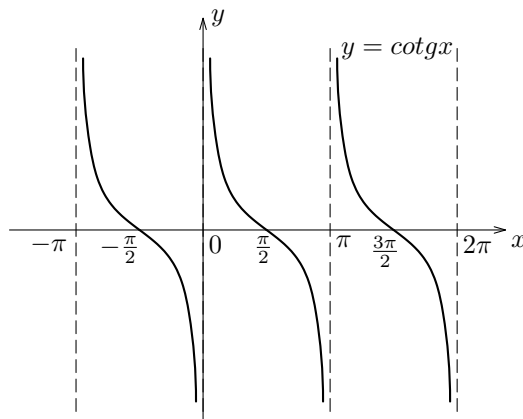
4. Funkcia $\operatorname{tg} x$ je rastúca na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, funkcia $\operatorname{cotg} x$ je klesajúca na intervale $(0, \pi)$.

Dokážeme tvrdenie pre $\operatorname{tg} x$. Nech $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $x_1 < x_2$. Potom nastane jeden z prípadov

- a) $-\frac{\pi}{2} < 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$,



obr.50



obr.51

b) $-\frac{\pi}{2} < x_1 \leq 0 < x_2 < \frac{\pi}{2}$,

c) $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq 0$.

Prípád a) Pretože $\sin x$ je rastúca funkcia na $(0, \frac{\pi}{2})$, $\cos x$ je klesajúca funkcia na $(0, \frac{\pi}{2})$ je $0 < \sin x_1 < \sin x_2$ a $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$. Z toho vyplýva, že $\operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2$.

Prípád b) $\operatorname{tg} x_1 \leq 0 < \operatorname{tg} x_2$.

Prípád c) Ak $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq 0$, potom $0 \leq -x_2 < -x_1 < \frac{\pi}{2}$ a podľa a) je $\operatorname{tg}(-x_2) < \operatorname{tg}(-x_1)$, odkiaľ vzhľadom na nepárnosť $\operatorname{tg} x$ platí $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Tým sme zistili, že funkcia $\operatorname{tg} x$ je rastúca na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Podobne sa urobí dôkaz pre funkciu $\cotg x$.

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = \infty, \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotg x = -\infty.$$

Nech $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, potom $\cos x > 0$. Ďalej platí: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$. Podľa vety 3.7.16 a dôsledku 3.7.13 je $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$. Pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\sin x > 0$. Ďalej

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0 \text{ a opäť podľa vety 3.7.16 a dôsledku 3.7.13 dostávame } \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = \infty.$$

Ostatné limity sa dokážu podobne.

6. Oborom hodnôt funkcií $\operatorname{tg} x$, $\cotg x$ je interval $(-\infty, \infty)$.

Tvrdenie vyplýva z vety 3.9.10 a vlastnosti 5).

Príklad 3.10.14. Funkcia $y = \frac{\sin x}{x}$ má v bode 0 limitu a platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Riešenie. Vzhľadom na nepárnosť funkcií x , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, nerovnosť (3.55) platí v tvare

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \quad \text{pre } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

odkiaľ

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{pre } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Keďže $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ podľa vety 3.6.8 je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

3.10.9 Cyklometrické funkcie

Pod cyklometrickými funkciami budeme rozumieť inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám. Keďže goniometrické funkcie nie sú prosté na celom svojom definičnom obore, budeme namiesto funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ uvažovať k nim parciálne funkcie. V súlade s konvenciou uvažujme funkcie $y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$; $y = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$.

Funkcia $y = \sin x$ na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ je spojitá, rastúca, nepárna a zobrazuje tento interval na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Podľa vety 3.9.19 existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame **arkussínus** a označujeme $\arcsin x$. Má vlastnosti:

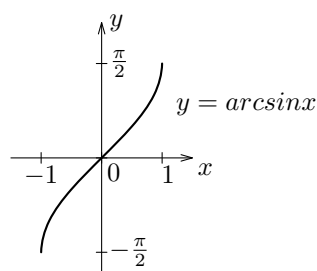
1. $D(\arcsin) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(\arcsin) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$; (definícia 3.4.1);
2. je spojitá na $\langle -1, 1 \rangle$ (veta 3.9.20);
3. je rastúca na $\langle -1, 1 \rangle$ (veta 3.9.20);
4. je nepárna (veta 3.4.5);
5. $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$; $\arcsin(\sin x) = x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

Funkcia $y = \cos x$ je na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ spojitá, klesajúca a zobrazuje tento interval na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Podľa vety 3.9.19 existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame **arkuskosínus** a označujeme $\arccos x$. Má vlastnosti:

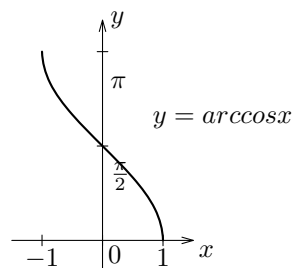
1. $D(\arccos) = \langle -1, 1 \rangle$, $H(\arccos) = \langle 0, \pi \rangle$; (definícia 3.4.1);
2. je spojitá na $\langle -1, 1 \rangle$ (veta 3.9.20);
3. je klesajúca na $\langle -1, 1 \rangle$ (veta 3.9.20);
4. $\cos(\arccos x) = x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$; $\arccos(\cos x) = x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ je na intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ spojitá, rastúca, nepárna a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, \infty)$. Podľa vety 3.9.19 existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame **arkustangens** a označujeme $\operatorname{arctg} x$. Má vlastnosti:

1. $D(\operatorname{arctg}) = (-\infty, \infty)$, $H(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; (definícia 3.4.1);
2. je spojitá na $\mathbb{R}$ (veta 3.9.20);
3. je rastúca na $\mathbb{R}$ (veta 3.9.20);



obr.52



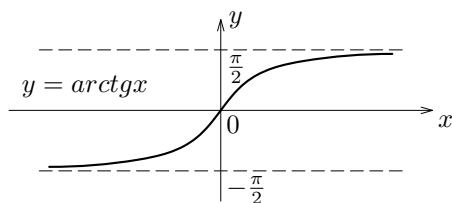
obr.53

4. je nepárna (veta 3.4.5);

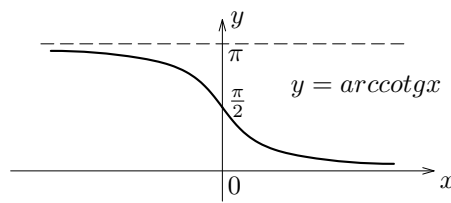
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$ (dôkaz prenechávame čitateľovi);

6. $\tg(\arctg x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $\arctg(\tg x) = x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkcia $y = \cotg x$ je spojitá, klesajúca na intervale $(0, \pi)$ a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, \infty)$. Podľa vety 3.9.19 existuje k nej inverzná funkcia, ktorú nazývame **arkuskotangens** a označujeme $\operatorname{arccotg} x$. Má vlastnosti:



obr.54



obr.55

1. $D(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$, $H(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$; (definícia 3.4.1);

2. je spojitá na $\mathbb{R}$ (veta 3.9.20);

3. je klesajúca na $\mathbb{R}$ (veta 3.9.20);

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$ (dôkaz prenechávame čitateľovi);

5. $\cotg(\operatorname{arccotg} x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{arccotg}(\cotg x) = x$, $x \in (0, \pi)$.

Tak ako medzi goniometrickými funkciami existujú vzájomné vzťahy, tak aj medzi cyklometrickými funkciami je rad vzťahov. Uvedieme niektoré z nich.

Veta 3.10.15.

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$;

2. $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ pre $x \in \mathbb{R}$;

3. $\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pre $x \in \mathbb{R}$;

$$4. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1, 1);$$

$$5. \arcsin x = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2} & \text{pre } x \in \langle -1, 0 \rangle; \\ \arccos \sqrt{1-x^2} & \text{pre } x \in (0, 1) \end{cases};$$

$$6. \operatorname{arccotg} x = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{pre } x \in (-\infty, 0); \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{pre } x \in \langle 0, \infty \rangle \end{cases};$$

$$7. \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Dôkaz. Dokážeme iba niektoré zo vzťahov. Ostatné prenechávame čitateľovi.

1. Označme $y = \arcsin x$, potom $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\sin y = x$. Platí teda $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = x$, $0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$, odkiaľ $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$, t.j. $\frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x$.

3. Pre $x \in (-\infty, \infty)$ je $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in (-1, 1)$. Označme $y = \operatorname{arctg} x$. Potom $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\operatorname{tg} y = x$, t.j.

$$\frac{\sin y}{\cos y} = x.$$

Upravme poslednú rovnosť: $\sin^2 y = x^2(1 - \sin^2 y)$,

$$\sin y = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pre $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos y > 0$ a teda $\operatorname{sign} \sin y = \operatorname{sign} \operatorname{tg} y = \operatorname{sign} x$. V poslednej rovnosti preto platí znamienko $+$ a tak $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $\square$

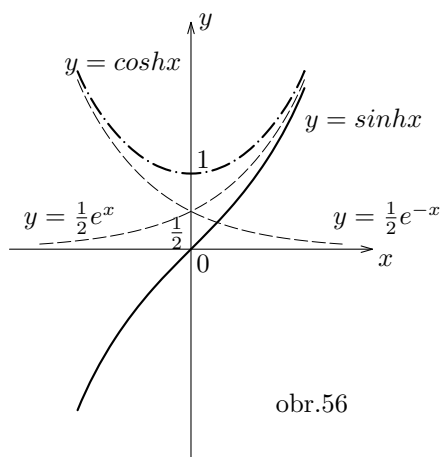
3.10.10 Hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

Hyperbolickými funkciami nazývame funkcie:

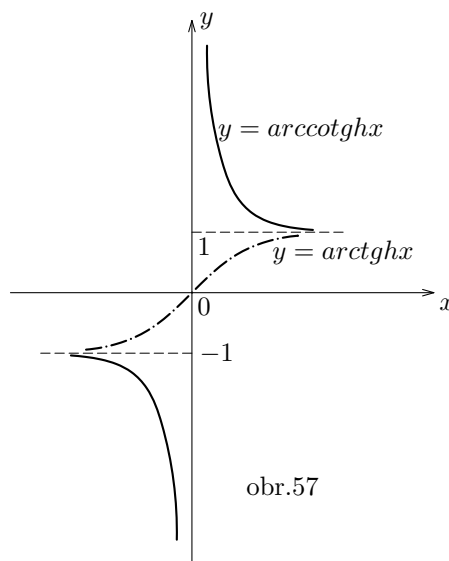
- hyperbolický sínus určený výrazom $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ a označujeme ju $\sinh x$;
- hyperbolický kosínus určený výrazom $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ a označujeme ju $\cosh x$;
- hyperbolický tangens určený výrazom $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$ a označujeme $\operatorname{tgh} x$;
- hyperbolický kotangens určený výrazom $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a označujeme $\operatorname{cotgh} x$.

Tieto funkcie majú veľa analogických vlastností ako goniometrické funkcie. Uvedieme niektoré z nich. Ich dôkazy prenechávame čitateľovi.

- hyperbolické funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch;
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ pre $x \in \mathbb{R}$;
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$;
 $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$;



obr.56



obr.57

4. $\sinh x$ je nepárna, rastúca na $\mathbb{R}$, pričom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty;$$

5. $\cosh x$ je párna, klesajúca na $(-\infty, 0)$, rastúca na $(0, \infty)$, pričom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \infty;$$

6. $\tgh x$ je nepárna, rastúca na $(-\infty, \infty)$, pričom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tgh x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tgh x = -1;$$

7. $\cotgh x$ je nepárna, klesajúca na $(-\infty, 0)$ aj na $(0, \infty)$, pričom

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotgh x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \cotgh x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cotgh x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \cotgh x = -1.$$

Inverzné funkcie k hyperbolickým funkciám nazývame **hyperbolometrickými funkciami**. Týmito funkciami sa už nebudeme zaoberať. Uvedieme len ich označenia a vzťahy, ktorými sú dané:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in \langle 1, \infty \rangle,$$

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Čitateľ si vie sám odvodiť ich základné vlastnosti alebo ich môže nájsť, napr. v [2].

Cvičenie

1. Zistite, či funkcia $f(x) = 1 + \operatorname{arctg}(3x + 2)$ je rýdzomonotónna a nájdite k nej inverznú.
2. Zistite, či funkcia $y = \frac{\sin 3x}{1 - \cos x}$, $y = \cot^2 x - \cos x$ je párna alebo nepárna.
3. Vypočítajte: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 5\sqrt[3]{x^2})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 - 2 \operatorname{arctg} x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \operatorname{tg}(4 - x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{1 - \sqrt{x+2}}$.
4. Nájdime obraz intervalu: a) $\langle -1, 3 \rangle$; b) $(3, \infty)$; c) $(3, \infty)$; c) $(-\infty, -5)$; d) $\langle 2, 5 \rangle$ pri funkcií: a) $y = \sin x$; b) $y = \log(1 + x)$; c) $y = e^{\sqrt{x-2}}$; d) $y = 3 - 2 \operatorname{arccotg} 2x$.

3.11 Niektoré dôležité limity funkcií

Pomocou viet o limitách zložených funkcií a vlastností funkcií a^x , x^a vieme vypočítať limity z funkcií typu $a^{f(x)}$, $(f(x))^a$ (f je funkcia definovaná na nejakej množine tak, aby jednotlivé výrazy mali zmysel, a je konštanta). Ostáva otvorený problém výpočtu limity funkcií typu $F(x) = f(x)^{g(x)}$ (f, g sú funkcie definované na nejakej množine tak, aby výraz mal zmysel). Takúto funkciu môžeme tiež zapísať

$$F(x) = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Jednou z funkcií tohto typu je funkcia

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Veta 3.11.1. Funkcia $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ má pre $x \rightarrow \infty$ limitu rovnú e , t.j.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Dôkaz. Vieme, že $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ pre $n \rightarrow \infty$ (príklad 2.5.6). Ukážeme, že ak $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je ľubovoľná postupnosť prirodzených čísel (nemusí byť rastúca) taká, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty, \quad (3.62)$$

potom

$$a_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \rightarrow e \quad \text{pre } k \rightarrow \infty. \quad (3.63)$$

Keďže postupnosť $a_n \rightarrow e$ pre $n \rightarrow \infty$ podľa definície limity platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0, n \in N \Rightarrow |a_n - e| < \varepsilon \quad (3.64)$$

a podmienka (3.62) znamená

$$\forall M > 0 \exists k_0 \forall k > k_0, k \in N \Rightarrow n_k > M. \quad (3.65)$$

Položme v (3.65) $M = n_0$, dostaneme, že existuje K také, že pre všetky $k > K$ je $n_k > n_0$ a zo (3.64) potom vyplýva, že $|a_{n_k} - e| < \varepsilon$ pre všetky $k > K$, t.j. platí tvrdenie (3.63).

Teraz dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Nech x je ľubovoľné reálne číslo, $x > 1$. Položme $[x] = n$. Potom $n \leq x < n + 1$ a

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (3.66)$$

Pretože $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{x \rightarrow \infty} [x] = \infty$ a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \end{aligned}$$

zo vzťahu (3.66) dostávame tvrdenie vety. □

Dôsledok 3.11.2. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Dôkaz. Tvrdenie sa jednoducho dokáže pomocou vety 3.11.1 a substitúcie: $z = -x$ v prípade 1., resp. $z = \frac{1}{x}$ v prípade 2. □

Dôsledok 3.11.3. Nech $a > 0$, $a \neq 1$, potom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

Dôkaz. Zvoľme funkciu

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

Táto funkcia je definovaná na okolí bodu 0 a vzhľadom na dôsledok 3.11.2 je v bode 0 spojitá. Preto $\log_a f(x)$, ako zložená funkcia dvoch spojitých funkcií, je spojitá v bode 0. Teda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right) = \log_a e.$$

Keďže $\log_a f(x) = \frac{\log_a(1+x)}{x}$ pre $x \neq 0$ je hľadaná limita $\log_a e$. Pre $a = e$ dostávame

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

□

Dôsledok 3.11.4. *Nech $a > 0$, $a \neq 1$, potom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.*

Dôkaz. Funkcia $y = a^x - 1$ je spojitá a rýdzomonotónna na $\mathbb{R}$. Existuje k nej inverzná funkcia $x = \log_a(1 + y)$, $y \in (-1, \infty)$, spojitá a rýdzomonotónna. Vzhľadom na to, že $y \rightarrow 0$ pre $x \rightarrow 0$ použitím dôsledku 3.11.3 dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \ln a.$$

Ak $a = e$ je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. □

Cvičenie

1. Nech $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ na nejakom prstencovom okolí bodu a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Potom $\lim_{x \rightarrow a} (1 + f(x))^{1/g(x)} = e^\alpha$. Dokážte.

2. Vypočítajte limity: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 4}{3x^3 - 5} \right)^{x^2}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$.

4 Diferenciálny počet

Podnetom na vznik diferenciálneho počtu boli problémy mechaniky (napr. určenie okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa telesa), problémy geometrie (napr. nájdenie dotyčnice ku krivkám). Riešenie týchto problémov sa zavŕšilo v 17. storočí vznikom diferenciálneho počtu, vznikom pojmu derivácia. Zakladateľmi tejto teórie sú nezávisle na sebe I. Newton¹¹ a G.W. Leibnitz. L.N. Carnot¹² povedal: Niet objavu, ktorý by spôsobil v matematických vedách prevrat taký šťastný a úplný ako infinitezimálny počet, ktorý by poskytol bádateľom také jednoduché, pestré a účinné prostriedky pri poznávaní prírodných zákonov.

V čom spočívali tie najjednoduchšie problémy mechaniky a geometrie?

1. Úloha o pohybe. Nech hmotný bod sa pohybuje po priamke a funkcia $S(t)$ udáva dráhu, ktorú prešiel bod za čas t od začiatku pohybu. Jeho priemerná rýchlosť v čase medzi t a $t + \Delta t$ je rovná

$$v_p = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Ak vyšetřovaný pohyb nie je rovnomerný, tak v_p sa pri pevnom t bude meniť so zmenou Δt a teda čím bude menšie Δt , tým lepšie bude v_p charakterizovať pohyb bodu v danom momente.

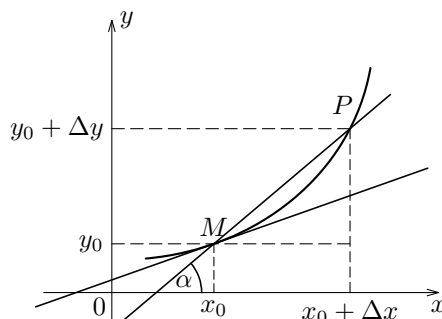
Rýchlosťou bodu v okamihu t – okamžitou rýchlosťou – je preto prirodzené nazývať hodnotu limity, ku ktorej sa blíži priemerná rýchlosť, ak $\Delta t \rightarrow 0$, t.j.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

2. Úloha o dotyčnici.

Nech je daná funkcia f , definovaná a spojitá na istom δ -okolí nejakého bodu x_0 . Ako nájsť dotyčnicu ku grafu funkcie f v bode $M = [x_0, y_0]$, $y_0 = f(x_0)$? Ak prírastok argumentu Δx je taký, že $0 < |\Delta x| < \delta$, tak rovnica priamky prechádzajúcej bodmi M a $P = [x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ je

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0),$$



obr.1

¹¹Isaac Newton (1643–1727), anglický fyzik, pre ktorého bola matematika pomocným nástrojom pri skúmaní prírody.

¹²Lazar Nicolas M. Carnot (1753–1823), francúzsky matematik.

kde $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$ (obr.1). Táto priamka je sečnicou grafu funkcie a $k = \operatorname{tg} \alpha$ je jej smernicou. Ak $\Delta x \rightarrow 0$, potom vzhľadom na spojitosť funkcie f aj $\Delta y \rightarrow 0$ a preto $|MP| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Dotyčnicou ku krivke zadanej rovnicou $y = f(x)$ v bode M sa nazýva limitná poloha sečnice prechádzajúcej bodom M pre $\Delta x \rightarrow 0$. To znamená, ak existuje

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k, \quad (4.2)$$

tak priamka prechádzajúca bodom M so smernicou k je dotyčnicou ku grafu funkcie f v bode x_0 .

Obe limity (4.1) a (4.2) sú rovnakého typu a to viedlo k zavedeniu nového pojmu v matematike.

4.1 Derivácia funkcie

Definícia 4.1.1. Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 a nech existuje vlastná

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (4.3)$$

Potom túto limitu nazývame **deriváciou funkcie f v bode x_0** a označujeme $f'(x_0)$.

Ak označíme $x_0 + h = x$, potom $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Operáciu výpočtu derivácie nazývame **derivovanie**. Označenie derivácie pomocou čiar-
ky nie je jediným označením. Používa sa tiež označenie: $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$ alebo $\frac{df(x_0)}{dx}$. Ak $y = f(x)$ namiesto f' môžeme písať y' .

Príklad 4.1.2. Vypočítajme derivácie nasledujúcich funkcií:

a) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ -konštantné.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

d) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

(vzhľadom na dôsledok 3.11.4). Pre $a = e$ máme $(e^x)' = e^x$.

e) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \cos x.$$

Podobne sa ukáže, že $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

f) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak $x_0 > 0$, potom $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Ak $x_0 < 0$, potom $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1$.

Ak $x_0 = 0$, potom $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ avšak táto limita neexistuje lebo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$.

□

Funkcie uvedené v príkladoch a)–e) sú spojité a majú deriváciu v každom bode, v ktorom sú spojité. Funkcia $f(x) = |x|$ je spojitá v bode 0 a nemá tam deriváciu. Aký je teda súvis medzi spojitosťou funkcie v bode a existenciou derivácie v bode? Príklad 4.1.2f) ukazuje, že zo spojitosti funkcie nevyplýva existencia derivácie. (Existujú dokonca spojité funkcie na intervale a nemajú deriváciu v žiadnom bode toho intervalu¹³.) Ako vidieť z nasledujúcej vety, obrátená implikácia je pravdivá.

Veta 4.1.3. *Nech funkcia f má v bode x_0 svojho definičného oboru deriváciu. Potom je funkcia f v bode x_0 spojitá.*

Dôkaz. Pre $h \neq 0$ platí

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h,$$

odkiaľ dostávame $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, čo znamená, že funkcia f je spojitá v bode x_0 . □

¹³Prvý publikovaný príklad takej funkcie patrí Weierstrassovi. Skôr, nezávisle na ňom, analogický príklad skonštruoval Bolzano, no ten nebol publikovaný.

Príklad 4.1.4. Zistíme, či funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má deriváciu v bode 0.

Riešenie. Vyšetříme spojitosť funkcie f v bode 0. Keďže $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, je funkcia f spojitá v bode 0 (podľa vety 3.6.14) a má zmysel počítať deriváciu

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0.$$

□

V druhej motivačnej úlohe sme už povedali, že ak existuje vlastná

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

tak hodnota $f'(x_0)$ predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$, ktorej rovnica je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Príklad 4.1.5. Nájdime rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = e^x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $y = x - 1$.

Riešenie. Smernice rovnobežných priamok sa rovnajú, preto smernica dotyčnice ku grafu funkcie je $y'(x_0) = e^{x_0} = 1$, odkiaľ dostávame x -ovú súradnicu bodu dotyku $x_0 = 0$. Bodom dotyku $T = [0, 1]$ prechádza dotyčnica rovnobežná s danou priamkou. Jej rovnica je $y = x + 1$. □

Analogicky s pojmi jednostranných limit sa zavedú pojmy derivácie sprava a derivácie zľava.

Definícia 4.1.6. Nech funkcia f je definovaná na pravom (ľavom) okolí bodu x_0 . **Deriváciou sprava (zľava)** funkcie f v bode x_0 nazývame vlastnú limitu sprava (zľava)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

a označujeme $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$). Derivácie sprava a zľava nazývame **jednostranné derivácie**.

Priamky prechádzajúce bodom $M = [x_0, f(x_0)]$ so smernicami $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ sa nazývajú dotyčnicami sprava, zľava funkcie f v bode M .

Z vlastností limit (veta 3.5.10) vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.1.7. *Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 . Funkcia f má deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má jednostranné derivácie $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

Príklad 4.1.8. a) Zistíme, či funkcia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{má deriváciu v bode 0.}$$

Funkcia f je spojitá v bode 0 ($\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$). Bude mať deriváciu $f'(0)$, ak budú existovať jednostranné derivácie a $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Vypočítajme jednostranné derivácie

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ a teda $f'(0) = 1$.

b) V príklade 4.1.2f) sme vlastne ukázali, že funkcia $f(x) = |x|$ má v bode 0 jednostranné derivácie $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$, ktoré sa nerovnajú a preto táto funkcia nemá deriváciu v bode 0.

□

Uveďme teraz, čo budeme rozumieť pod pojmom nevlastná derivácia .

Definícia 4.1.9. Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu x_0 . Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 **nevlastnú deriváciu $+\infty$** , resp. **$-\infty$** , ak

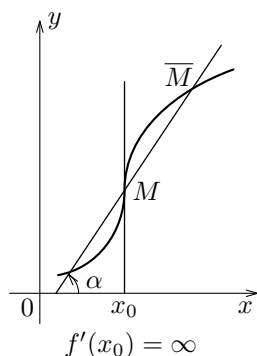
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, \quad \text{resp. } -\infty.$$

Analogicky definujeme jednostranné nevlastné derivácie.

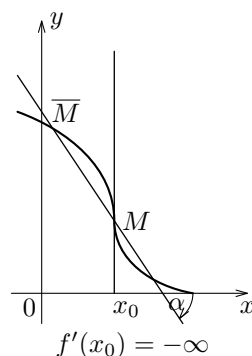
Vieme, že hodnota $f'(x_0)$ predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie. Ak je $f'(x_0) = \pm\infty$, potom dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $M = [x_0, f(x_0)]$ je kolmá

na os x (je to priamka $x = x_0$). Pozrime sa podrobnejšie na to, ako bude vyzerat' graf funkcie v jednotlivých prípadoch.

Ak $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = -\infty$) znamená to, že ľubovoľná sečnica idúca bodmi M , $\bar{M}$ ($\bar{M}$ je ľubovoľný bod grafu funkcie z malého okolia bodu M) zvierá s osou x kladný (záporný) uhol α blízky $\frac{\pi}{2}$ (blízky $-\frac{\pi}{2}$). Vid' obr.2 (obr.3).

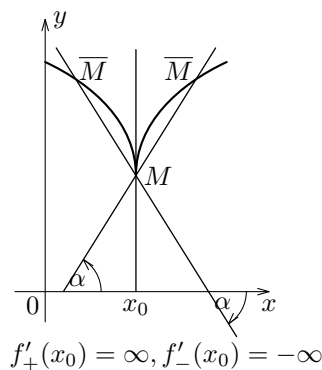


obr.2

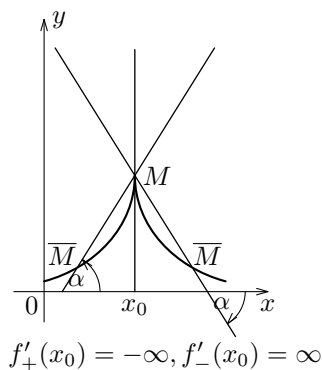


obr.3

Ak v bode x_0 existujú jednostranné nevlastné derivácie rôznych znamienok, dotyčnica sprava aj zľava v bode $M = [x_0, f(x_0)]$ sú kolmé na os x a teda sú totožné. Priamka $x = x_0$ je dotyčnicou ku grafu funkcie v bode M (obr.4,5).



obr.4



obr.5

Príklad 4.1.10. a) Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bode $x_0 = 0$.

Riešenie. Funkcia f je spojitá v bode 0.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

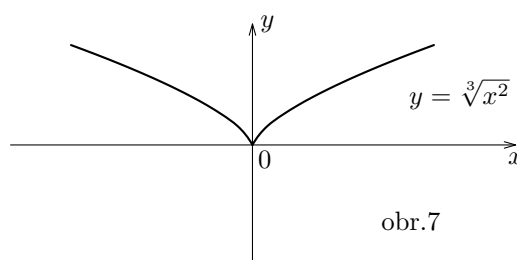
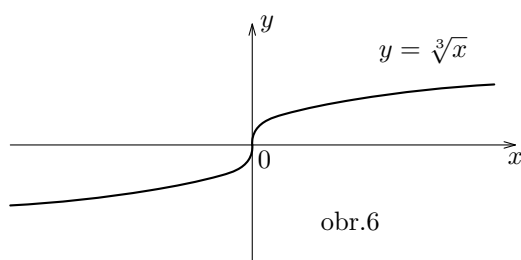
b) Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ v bode $x_0 = 0$.

Riešenie. Funkcia f je spojitá v bode 0 a $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

tá neexistuje lebo

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$



c) Vypočítajme deriváciu funkcie $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie. Funkcia f je spojitá v bode 1, $f(1) = 0$. Vypočítajme jednostranné derivácie

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x-1} = 0.$$

Funkcia f nemá deriváciu v bode $x_0 = 1$.

d) Vyšetrite spojitosť a existenciu derivácie funkcie $f(x) = \text{sign } x$ v bode $x_0 = 0$.

Riešenie.

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ -1 & \text{pre } x < 0. \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)}{x} = \infty.$$

To znamená, že existuje nevlastná derivácia $f'(0) = \infty$, avšak funkcia $f(x) = \text{sign } x$ nie je spojitá v bode 0. Tento príklad ukazuje, že v prípade nevlastných derivácií neplatí veta 4.1.3. $\square$

Cvičenie

1. Na základe definície určte deriváciu funkcie f v bode x_0 , ak:

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, x_0 = 1; \quad f(x) = \sqrt{1+x^2}, x_0 = \sqrt{3};$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0.$$

2. Zostrojte spojitú funkciu, ktorá nemá deriváciu v bodoch $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$).
3. Nájdite rovnicu dotýčnice ku grafu funkcie $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ktorá
- prechádza bodom $A = [0, 3]$;
 - prechádza bodom $B = [1, 5]$.
4. Pod akým uhlom graf funkcie $y = \sin x$ pretína os x v bode $x = 0$?

4.2 Diferenciál funkcie

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 . Ak prejdeme od bodu x_0 do bodu $x_0 + h$ zmení sa hodnota funkcie o $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Tento rozdiel označujeme $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ a nazývame **diferenciou** alebo **prírastkom funkcie f** , v bode x_0 , ktorý patrí k prírastku h . V praxi sa často stretávame s úlohou nájsť diferenciu funkcie alebo aspoň jej približnú hodnotu, čo pre zložitejšie funkcie nie je jednoduchá úloha. V závere tohto článku ukážeme jednu z metód nájdania približnej hodnoty diferencie funkcie.

Definícia 4.2.1. Nech funkcia $y = f(x)$ je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 . Funkciu f nazývame **diferencovateľnou v bode x_0** , ak prírastok funkcie sa dá vyjadriť v tvare

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + h \cdot \omega(h), \quad (4.4)$$

kde A je číslo, $\omega(h)$ je funkcia spojitá v bode 0 a $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$.

Výraz $A \cdot h$ nazývame **diferenciálom funkcie f v bode x_0** a označujeme $df(x_0)$ alebo $dy, df(x)|_{x=x_0}$. Teda

$$\Delta y = dy + h \cdot \omega(h) \quad \text{pre } h \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$$\text{pričom} \quad dy = A \cdot h. \quad (4.6)$$

Je dôležité si uvedomiť, že diferenciál je lineárnou funkciou h , je úplne určený konštantou A (A je konštanta pri pevnom x_0). V jeho zápise sa môžeme vrátiť k premennej x . Ak zapíšeme $h = x - x_0$ má diferenciál (4.6) tvar $df(x_0) = A \cdot (x - x_0)$.

Nasledujúca veta hovorí, aký je vzťah medzi pojmami „funkcia má deriváciu v bode x_0 “ a „funkcia je diferencovateľná v bode x_0 “.

Veta 4.2.2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 práve vtedy, ak má deriváciu v bode x_0 . Pritom platí*

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Dôkaz. Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 , platí vzťah (4.4) a preto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \omega(h), \quad \text{pre } h \neq 0 \text{ a } \omega(h) \rightarrow 0 \text{ pre } h \rightarrow 0.$$

Odtiaľ potom vyplýva, že existuje $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A$, t.j. existuje derivácia $f'(x_0) = A$.

Opačne, nech existuje $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Odtiaľ vyplýva, že

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \omega(h), \quad \text{kde } \omega(h) \rightarrow 0 \text{ pre } h \rightarrow 0.$$

Úpravou dostávame $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h \cdot \omega(h)$ čo znamená, že funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 a $A = f'(x_0)$. $\square$

Veta 4.2.2 hovorí, že existencia derivácie v bode je ekvivalentná s diferencovateľnosťou v bode. Funkciu, ktorá má deriváciu v každom bode intervalu (a, b) , nazývame **diferencovateľnou na intervale (a, b)** .

Ak je funkcia diferencovateľná na intervale (a, b) a existujú jednostranné derivácie $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ nazývame ju **diferencovateľnou na intervale $\langle a, b \rangle$** .

Poznámka. Z vety 4.2.2 máme tvar diferenciálu v bode x_0 , ak označíme $h = x - x_0$, $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Pre funkciu $g(x) = x$ jej diferenciál v bode x_0 je $dg(x_0) = dx|_{x=x_0} = x - x_0$, preto sa dá diferenciál zapísať tiež v tvare $df(x_0) = f'(x_0)dx|_{x=x_0}$ alebo skrátene $f'(x_0)dx$. Zápis $f'(x)dx$ je bežný na označenie diferenciálu v ľubovoľnom bode x .

Príklad 4.2.3. Nájdime diferenciál funkcie $y = x^3$ v bode $x_0 = 5$.

Riešenie. Vieme, že $y' = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (príklad 4.1.2b)). Potom

$$dy = y'(x_0)(x - x_0) = 3 \cdot 25(x - 5) = 75(x - 5). \quad \square$$

Pozrime sa teraz ako je to so vzťahom „diferencia – diferenciál“. Vo vzťahu (4.4) výraz $\omega(h) \rightarrow 0$ pre $h \rightarrow 0$. To znamená, že pri malej zmene argumentu ho môžeme urobiť dostatočne malým. Preto, ak zameníme diferenciu funkcie jej diferenciálom dostaneme približnú rovnosť

$$\Delta f \doteq df \quad \text{resp.} \quad f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h. \quad (4.7)$$

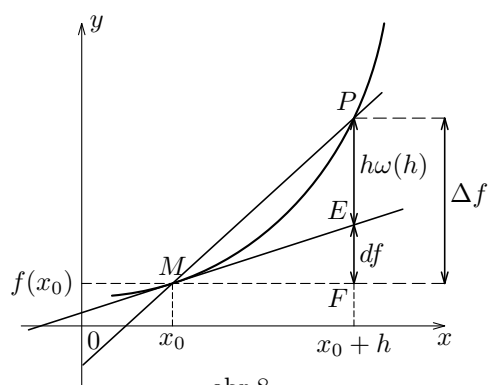
Tento vzťah môžeme použiť na približný výpočet hodnoty $f(x_0 + h)$ pri malom h , ak poznáme hodnoty $f(x_0)$, $f'(x_0)$.

Príklad 4.2.4. Vypočítajte približnú hodnotu $\sqrt{9,01}$.

Riešenie. Položme vo vzťahu (4.7): $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $h = 0,01$. Ďalej vieme, že $f(9) = \sqrt{9} = 3$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (príklad 4.1.2c), $f'(9) = \frac{1}{6}$. Dosadením do (4.7) dostaneme

$$\sqrt{9,01} \doteq \sqrt{9} + \frac{1}{6} \cdot 0,01 = \frac{18,01}{6} = 3,00166.$$

□



obr.8

Geometrická interpretácia diferenciálu.

Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 . Potom existuje dotyčnica ku grafu tejto funkcie v bode $M = [x_0, f(x_0)]$. Jej rovnica je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nech bod $P = [x_0 + h, f(x_0 + h)]$ je bod grafu funkcie f , E a F sú priesečníky priamky $x = x_0 + h$ s dotyčnicou a priamkou $y = f(x_0)$. Potom

$$E = [x_0 + h, f(x_0) + f'(x_0)h], \quad F = [x_0 + h, f(x_0)].$$

Rozdiel y -ových súradníc bodov E , F je $f'(x_0)h$, t.j. rovný diferenciálu funkcie f v bode x_0 (obr.8).

4.3 Základné pravidlá výpočtu derivácie

Uvedieme pravidlá derivovania súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií, výpočet derivácie zloženej a inverznej funkcie.

Veta 4.3.1. *Nech funkcie f, g sú diferencovateľné v bode x_0 . Potom aj funkcie $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (ak $g(x_0) \neq 0$) sú diferencovateľné v bode x_0 , pričom platí*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \quad (4.8)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0. \quad (4.10)$$

Dôkaz. Dokážeme pravidlá pre súčin a podiel. Pravidlá pre súčet a rozdiel prenechávame čitateľovi.

Pravidlo pre súčin.

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \right) = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Použili sme vetu o limite súčtu a súčinu funkcií, vetu 4.1.3 a predpoklady vety.

Pravidlo pre podiel.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)} - \frac{f(x_0) - f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Opäť sme použili vetu o limite súčtu, súčinu a podielu funkcií, vetu 4.1.3 a predpoklad vety. □

Dôsledok 4.3.2. *a) Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

b) Nech funkcie f_k , $k = 1, \dots, n$ sú diferencovateľné v bode x_0 a c_k , $k = 1, \dots, n$ sú konštanty, potom

$$\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^n c_k f'_k(x_0).$$

Príklad 4.3.3. Vypočítajme derivácie nasledujúcich funkcií.

a) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, $x \in \mathbb{R}$.

Podľa dôsledku 4.3.2 a príkladu 4.1.2b) máme

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

b) $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podľa vety 4.3.1 a príkladu 4.1.2b) platí

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{-(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}.$$

Zatiaľ teda vieme, že $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ pre $k \in \mathbb{Z}$.

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Podľa vety 4.3.1 a príkladu 4.1.2e) máme

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Podobne sa ukáže, že derivácia $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $f(x) = x \cdot |x|$ v bode $x_0 = 0$.

Funkcia f je súčinom dvoch funkcií $g(x) = x$, $h(x) = |x|$. Funkcia g je diferencovateľná v bode 0, $g'(0) = 1$, funkcia h nie je diferencovateľná v bode 0. Nemôžeme použiť vetu 4.3.1. Avšak podľa definície derivácie

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot |x|}{x} = 0. \quad \square$$

Veta 4.3.4. [o derivácii inverznej funkcie] Nech funkcia f je spojitá a rýdzomonotónna na intervale (a, b) , diferencovateľná v bode $x_0 \in (a, b)$ a nech $f'(x_0) \neq 0$. Potom k nej inverzná funkcia $\bar{f}$ je diferencovateľná v bode $y_0 = f(x_0)$, pričom

$$(\bar{f}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (4.11)$$

Dôkaz. Nech f je rastúca na intervale (a, b) a zobrazuje ho na interval (α, β) a $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$. Podľa viet 3.9.19 a 3.9.20 existuje k nej inverzná funkcia na intervale (α, β) , ktorá je spojitá a rastúca. To znamená, že $\bar{f}(y) \neq \bar{f}(y_0)$ pre $y \neq y_0$, $y, y_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 = f(x_0)$. Preto

$$\frac{\bar{f}(y) - \bar{f}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{\bar{f}(y) - \bar{f}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad (4.12)$$

pre $y, y_0 \in (\alpha, \beta)$, $x, x_0 \in (a, b)$, $f(x) = y$. Zo spojitosti f , $\bar{f}$ dostaneme, že ak $x \rightarrow x_0$, tak $y \rightarrow y_0$ a naopak. Preto, ak prejdeme v (4.12) k limite pre $y \rightarrow y_0$ na ľavej strane, potom $x \rightarrow x_0$ na pravej strane a tá limita podľa predpokladu existuje a

$$(\bar{f}(y_0))' = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\bar{f}(y) - \bar{f}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Poznámka. a) Ak vo vzorci (4.11) uplatníme rovnosť $x_0 = \bar{f}(y_0)$ a potom zmeníme označenie tak, že budeme písať x namiesto y_0 , vzorec (4.11) prejde do tvaru

$$(\bar{f}(x))' = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

b) V prípade, že $f'(x_0) = 0$, tak vzhľadom na rastúcosť (klesajúcosť) funkcie f je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \right)$$

pre $x \neq x_0$ z nejakého okolia bodu x_0 a z (4.12) dostaneme, že $(\bar{f}(y_0))' = \infty$ ($(\bar{f}(y_0))' = -\infty$).

Príklad 4.3.5. Nájdime derivácie funkcií:

a) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Funkcia $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je inverzná funkcia k funkcii $g(x) = x^n$, $x > 0$. Funkcia g je pre $x > 0$ spojitá, rastúca, diferencovateľná a zobrazuje interval $(0, \infty)$ na interval $(0, \infty)$ a jej derivácia $g'(x) = n \cdot x^{n-1} \neq 0$ pre $x > 0$. Podľa vety 4.3.4 dostaneme

$$f'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, x > 0$$

(podľa predchádzajúcej poznámky je $f'_+(0) = \infty$).

b) $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Funkcia $\log_a x$ je spojitá, rýdzomonotónna a zobrazuje interval $(0, \infty)$ na $\mathbb{R}$. K nej inverzná funkcia $x = \bar{f}(y) = a^y$ je spojitá, rýdzomonotónna, diferencovateľná na $\mathbb{R}$ a jej derivácia $(\bar{f}(y))' = a^y \cdot \ln a$ (príklad 4.1.2d)). Podľa vety 4.3.4 máme

$$f'(x) = \frac{1}{(\bar{f}(f(x)))'} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

(Ak $a = e$, potom $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$).

c) $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$.

Inverzná funkcia k tejto funkcii je $x = \bar{f}(y) = \sin y$ a $(\bar{f}(y))' = \cos y \neq 0$ pre $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Podľa vety 4.3.4 platí

$$f'(x) = \frac{1}{(\bar{f}(f(x)))'} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1).$$

Podľa poslednej poznámky je $f'_-(1) = f'_+(-1) = \infty$.

□

Veta 4.3.6. [o derivácii zloženej funkcie] Nech funkcia g je diferencovateľná v bode x_0 , funkcia f je diferencovateľná v bode $g(x_0)$. Potom zložená funkcia $f(g(x))$ je diferencovateľná v bode x_0 a platí

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Dôkaz. Položme $c = g(x_0)$,

$$\varphi(h) = g(x_0 + h) - g(x_0), \quad (4.13)$$

$$\psi(k) = \begin{cases} f'(c) & \text{pre } k = 0, \\ \frac{f(c+k) - f(c)}{k} & \text{pre } k \neq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Keďže f, g sú spojité funkcie, a existuje $f'(c)$, potom sú spojité aj funkcie φ, ψ a $\varphi(0) = 0$.

Ďalej zo vzťahu (4.13) je $g(x_0 + h) = c + \varphi(h)$ a zo vzťahu (4.14) $f(c+k) - f(c) = k \cdot \psi(k)$.

Potom pre $h \neq 0$ dostávame

$$\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(c + \varphi(h)) - f(c)}{h} = \frac{\varphi(h)}{h} \cdot \psi(\varphi(h)). \quad (4.15)$$

Avšak $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ a podľa vety 3.8.11 je $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(\varphi(h)) = \psi(0) = f'(g(x_0))$. Vzhľadom na to zo vzťahu (4.15) dostaneme

$$f(g(x))' \Big|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

□

Ak použijeme označenie derivácie funkcie $y = f(x)$ ako $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, môžeme deriváciu zloženej funkcie $z = f(y) = f(g(x))$ zapísať

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Pravidlo derivácie zloženej funkcie môžeme použiť na funkciu zloženú z konečného počtu funkcií. Napr. nech $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ sú diferencovateľné funkcie v odpovedajúcich bodoch t_0 , $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(x_0)$. Potom funkcia $z = z(y) = z(y(x)) = z(y(x(t)))$ je diferencovateľná v bode t_0 a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Príklad 4.3.7. Nájdime derivácie funkcií:

a) $f(x) = x^r$, $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ (ak m je párne môže byť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Funkcia $x^r = \sqrt[n]{x^m}$ je zložená funkcia z funkcií $g(y) = \sqrt[n]{y}$ a $y = h(x) = x^m$, ktoré sú diferencovateľné (príklady 4.3.5a), 4.1.2b)). Potom podľa vety 4.3.6

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} m x^{m-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = r x^{r-1}.$$

Poznamenajme, že zatiaľ máme dokázané, že $(x^a)' = a x^{a-1}$ pre $a \in \mathbb{Q}$.

b) $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Vieme, že mocninovú funkciu s reálnym exponentom o rovnici $y = x^a$ môžeme zapísať v tvare $y = e^{a \ln x}$. Tým je to zložená funkcia z funkcií e^u , $u = a \ln x$ a môžeme derivovať

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = e^{a \ln x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

c) $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Na určenie derivácie nemôžeme použiť ani pravidlo $(a^x)'$ ani $(x^a)'$. Funkciu f však môžeme zapísať v tvare $f(x) = e^{x \ln x}$ a tú už vieme derivovať ako zloženú funkciu

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1), \quad x > 0.$$

Vo všeobecnosti, ak máme funkciu tvaru $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$ pre $x \in (a, b)$ a funkcie u, v sú diferencovateľné v bode $x \in (a, b)$, tak

$$f'(x) = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \quad \square$$

Príklad 4.3.8. Vyšetrite diferencovateľnosť funkcie $f(x) = |x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

Riešenie. Funkcia f je zložená z dvoch funkcií $y = g(x) = x^2 - 1$, $h(y) = |y|$. Funkcia g je diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R}$, funkcia h je diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vetu 4.3.6 môžeme použiť v bodoch, pre ktoré $x^2 - 1 \neq 0$, t.j. $x \neq \pm 1$. To

znamená, že funkcia $f(x) = |x^2 - 1|$ je diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. V bodoch 1, -1 vetu 4.3.6 nemôžeme použiť a tak sa obrátíme na definíciu derivácie

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \quad \text{neexistuje lebo}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = 2, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = -2.$$

Podobne sa ukáže, že neexistuje $f'(-1)$, lebo $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$. $\square$

Uvedieme prehľadnú tabuľku vzorcov pre derivovanie základných elementárnych funkcií. Niektoré z nich sme už dokázali, zvyšné dôkazy prenechávame čitateľovi.

1. $(c)' = 0$, c - reálne konštantné číslo;
2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ (ak a je také, že x^a je definované na $\mathbb{R}$, vzorec platí pre každé $x \in \mathbb{R}$);
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;
5. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
7. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
9. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
10. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$;
11. $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{(\sinh x)^2}$, $x \neq 0$.

Cvičenie

1. Vyšetrite diferencovateľnosť funkcie $f(x) = \frac{1+|x-1|}{|x+2|}$.
2. Určte približnú hodnotu $\sin 60^\circ 30'$; $\sqrt{1,003}$.
3. Vypočítajte derivácie funkcií: $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x^3+5}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2+1)$,
 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $f(x) = x^{1/x}$, $f(x) = \log(e^x + e^{-x})$.
4. Vyšetrite diferencovateľnosť funkcií: $f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}$, $|x| \geq 1$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5. Rozhodnite, či platia tvrdenia a uveďte príklady:

- a) Ak funkcia g nemá deriváciu v bode a , funkcia f má deriváciu v bode a , potom funkcie $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ nemajú deriváciu v bode a .
- b) Nech funkcie f , g nemajú deriváciu v bode a , potom funkcie $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ nemajú derivácie v bode a .

6. Čo môžeme povedať o derivácii zloženej funkcie $f(g(x))$ v bode a , ak:

- a) f má deriváciu v bode $g(a)$, g nemá deriváciu v bode a ;
- b) f nemá deriváciu v bode $g(a)$, g má deriváciu v bode a ;
- c) f , g nemajú deriváciu v odpovedajúcich bodoch $g(a)$, a .

Uveďte príklady.

4.4 Derivácia a diferenciál vyššieho rádu

Nech funkcia f je definovaná na intervale I a má v každom bode $x_0 \in I$ deriváciu $f'(x_0)$. Funkciu f' často nazývame **prvou deriváciou** alebo deriváciou prvého rádu funkcie f . Ak funkcia f' je diferencovateľná v bode $x_0 \in I$, tak jej deriváciu nazývame **druhou deriváciou** alebo **deriváciou druhého rádu** funkcie f v bode x_0 a označujeme $f''(x_0)$, $\frac{d^2(f(x_0))}{dx^2}$. Teda

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

Ak druhá derivácia existuje v každom bode intervalu $I' \subset I$, tak funkciu, ktorá každému $x \in I'$ priradí $f''(x)$ označujeme f'' , $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Ak je funkcia $f''(x)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in I'$, tak jej deriváciu nazývame **treťou deriváciou** alebo **deriváciou tretieho rádu** funkcie f v bode x_0 a označujeme $f'''(x_0)$; $f^{(3)}(x_0)$; $\frac{d^3 f(x_0)}{dx^3}$. Teda

$$f'''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0 + h) - f''(x_0)}{h}.$$

Ak tretia derivácia existuje v každom bode intervalu $I'' \subset I'$, tak funkciu, ktorá každému $x \in I''$ priradí $f'''(x)$ označujeme f''' , $f^{(3)}$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$.

Analogicky definujeme deriváciu ľubovoľného rádu.

Definícia 4.4.1. Nech funkcia f má na intervale I derivácie $f', \dots, f^{(n-1)}$, $n \geq 2$. Ak je funkcia $f^{(n-1)}$ diferencovateľná v bode $x_0 \in I$, tak jej deriváciu nazývame **n -tou deriváciou** alebo **deriváciou n -tého rádu** funkcie f v bode x_0 a označujeme $f^{(n)}(x_0)$; $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Podľa definície teda, ak má funkcia f deriváciu n -tého rádu, tak

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0}, \quad \text{t.j.} \quad f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Čitateľ nech si sám premyslí, že ak existuje $f^{(n)}(x_0)$ (vlastná alebo nevlastná), potom existuje $\delta > 0$ také, že

1. pre $0 \leq k \leq n-1$ sú funkcie $f^{(k)}$ definované na $O_\delta(x_0)$;
2. pre $0 \leq k < n-1$ sú funkcie $f^{(k)}$ spojité na $O_\delta(x_0)$;
3. ak $f^{(n)}(x_0)$ je vlastná, potom $f^{(n-1)}$ je spojitá v bode x_0 .

Funkciu, ktorá má v bode $x_0 \in I$ deriváciu n -tého rádu nazývame **n -krát diferencovateľnou funkciou v bode x_0** . Ak je funkcia f n -krát diferencovateľná v každom bode intervalu I hovoríme, že funkcia f je **n -krát diferencovateľná na intervale I** . Ak funkcia f má na intervale I deriváciu každého rádu (t.j. pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $f^{(n)}$) nazývame ju **nekonečne diferencovateľnou na I** . Je výhodné zaviesť definitoricky pojem nulte derivácie funkcie f takto: $f^{(0)} = f$.

Je zrejmé, že platia nasledujúce vety, ktorých dôkazy prenechávame čitateľovi.

Veta 4.4.2. *Nech $m, n \in \mathbb{N}$ a funkcie f, g sú diferencovateľné na I do takého rádu, aby ich derivácie vystupujúce v tvrdení existovali. Potom*

- a) $(f^{(m)}(x))^{(n)} = f^{(n+m)}(x), x \in I$;
- b) $(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x), x \in I$;
- c) $(cf)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x), x \in I, c \in \mathbb{R}$.

Dôkaz sa urobí matematickou indukciou vzhľadom na n .

Veta 4.4.3. [Leibnitzov vzorec] Nech f, g sú n -krát diferencovateľné na I , potom $f \cdot g$ je n -krát diferencovateľné na I a platí

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x) g^{(i)}(x).$$

Dôkaz sa urobí matematickou indukciou vzhľadom na n s využitím vlastností kombinačných čísel.

Príklad 4.4.4. Nájdime n -tú deriváciu funkcie $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$.

Riešenie. Funkcia f je diferencovateľná na $\mathbb{R}$ a $f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Tá je opäť diferencovateľná funkcia na $\mathbb{R}$ a $f''(x) = a^x \cdot \ln^2 a$. Matematickou indukciou ľahko ukážeme, že $f^{(n)}(x) = a^x \cdot \ln^n a$. □

Príklad 4.4.5. Nájdime $f'''(x)$, ak $f(x) = |x|^3$.

Riešenie. Vieme, že

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Ak $x \neq 0$, potom

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0, \\ -3x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Ak $x = 0$, potom podľa definície $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{x} = 0$. Teda

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -3x^2, & x < 0, \end{cases} \quad \text{je to spojitá funkcia na } \mathbb{R}.$$

Pre druhú deriváciu platí:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0, \\ -6x, & x < 0, \end{cases}$$

a pre $x = 0$ $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$, lebo $f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x} = 0$

a $f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-3x^2)}{x} = 0$. To znamená

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -6x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{t.j. } f''(x) = 6|x|.$$

Pre tretiu deriváciu platí

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & x > 0, \\ -6, & x < 0, \\ \text{neexistuje,} & x = 0. \end{cases}$$

□

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 . Už sme mali definovaný pojem diferenciálu funkcia f v bode x_0 , $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)dx$ (definícia 4.2.1),

ako lineárnej funkcie prírastku argumentu. Vychádzajúc z tejto definície môžeme zaviesť **diferenciál druhého rádu** funkcie f v bode x_0 takto: $d^2 f(x_0) = f''(x_0)(x - x_0)^2 = f''(x_0)dx^2$, ak existuje konečná druhá derivácia funkcie f v bode x_0 .

Podobne zavedieme **diferenciál n -tého rádu** (alebo **n -tý diferenciál**) funkcie f v bode x_0 takto: $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0)dx^n$, ak funkcia f je n -krát diferencovateľná v bode x_0 .

Cvičenie

1. Dokážte, že: a) $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$; b) $(\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n}$; c) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Vypočítajte $f^{(n)}$ pre $n \geq 2$, ak: $f(x) = (x-1)^2 \sin x \sin(x+1)$;
 $f(x) = (1-2x^2) \ln(1-3x)^3$.
3. Nech funkcie f, g sú n -krát diferencovateľné odpovedajúco v bodoch $g(a), a$. Odvoďte pravidlá pre n -tú deriváciu funkcie $f(g(x))$ v bode a , pre $n = 2, 3, 4$.

4.5 Základné vety diferenciálneho počtu

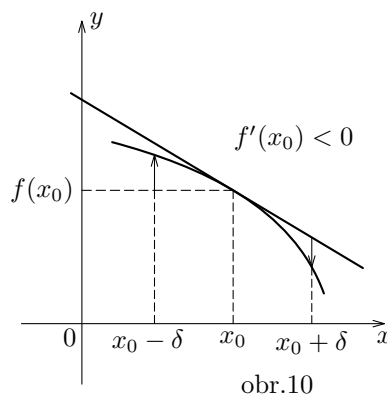
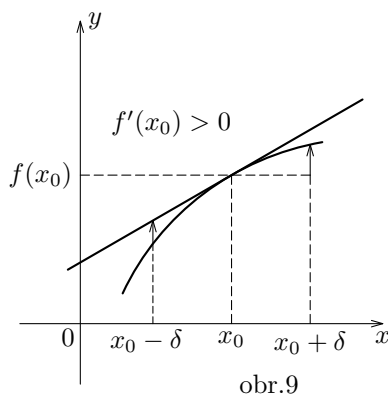
Vety, ktoré uvedieme, majú široké uplatnenie pri riešení teoretických, ale aj praktických problémov. Prv než ich sformulujeme dokážeme pomocnú vetu.

Lema 4.5.1. *Nech $f'(x_0) \neq 0$, potom existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in O_\delta^*(x_0)$ platí*
$$(f(x) - f(x_0))(x - x_0) \operatorname{sign} f'(x_0) > 0.$$

Dôkaz. Nech $f'(x_0) > 0$. Podľa definície derivácie $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Podľa vety 3.6.3 existuje $\delta > 0$ také, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pre $x \in O_\delta^*(x_0)$, čo je ekvivalentné s tvrdením lemy.

V prípade $f'(x_0) < 0$ je dôkaz analogický (obr.9 a 10). □

Poznámka. Lema 4.5.1 hovorí, že ak $f'(x_0) > 0$, tak pre $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$ a pre $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) > f(x_0)$ a takú funkciu budeme nazývať rastúcou v bode x_0 . Podobne, ak $f'(x_0) < 0$, tak pre $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$ a pre $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) < f(x_0)$ a takú funkciu budeme nazývať klesajúcou v bode x_0 .



Veta 4.5.2. [Rolleova¹⁴ veta] Nech funkcia f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovateľná na (a, b) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f'(c) = 0$.

Dôkaz. Podľa Weierstrassovej vety (veta 3.9.5) funkcia f nadobúda na $\langle a, b \rangle$ svoje maximum M a minimum m . Môžu nastať dva prípady:

1. funkcia f nadobúda aspoň jednu z hodnôt m, M v nejakom vnútornom bode $c \in (a, b)$;
2. funkcia f nadobúda obidve hodnoty m, M v krajných bodoch intervalu $\langle a, b \rangle$.

Ak nastane prípad 1), dokážeme, že $f'(c) = 0$. Predpokladajme, že $f(c) = M$ (analogicky sa vyšetrí prípad, ak $f(c) = m$). Ak by $f'(c) \neq 0$, potom podľa lemy 4.5.1 v nejakom okolí bodu c existujú body c_1, c_2 také, že $f(c_1) > M$ a $f(c_2) < M$. To je však spor s tým, že $f(c) = M$ je maximum funkcie f na $\langle a, b \rangle$. Preto $f'(c) = 0$.

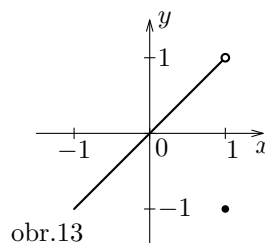
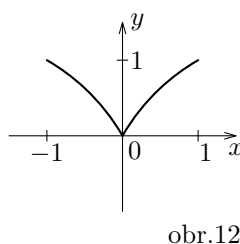
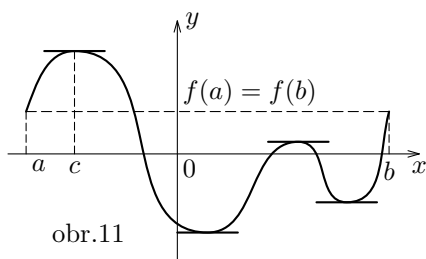
Ak nastane prípad 2), potom $m = M = f(a) = f(b)$ a v tom prípade je f konštantná na $\langle a, b \rangle$. Potom však v ľubovoľnom bode $c \in (a, b)$ je $f'(c) = 0$. $\square$

Z geometrického hľadiska Rolleova veta hovorí, že za splnenia jej predpokladov existuje $c \in (a, b)$ také, že dotyčnica ku grafu funkcie v bode $[c, f(c)]$ je rovnobežná s osou x . Rolleova veta dokazuje existenciu aspoň jedného takého bodu. Môže sa stať, že tých bodov je viacej alebo aj nekonečne veľa (obr.11).

Obidva predpoklady Rolleovej vety sú podstatné ako ukazujú nasledujúce príklady.

Príklad 4.5.3. a) Funkcia $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na uzavretom intervale $\langle -1, 1 \rangle$, $f(-1) = f(1) = 1$, nemá deriváciu v bode $x = 0$. Neexistuje bod $c \in (-1, 1)$ taký, že $f'(c) = 0$ (obr.12).

¹⁴Michael Rolle (1652–1719), francúzsky matematik, člen Parížskej akadémie vied. Dlhú dobu kritizoval Leibnitzovu teóriu infinitezimálneho počtu.



b) Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle -1, 1 \rangle, \\ -1, & x = 1. \end{cases}$$

Je definovaná na uzavretom intervale $\langle -1, 1 \rangle$, ale nie je na tomto intervale spojitá (nespojité v bode 1 zľava), je diferencovateľná na $(-1, 1)$, $f'(x) = 1$, $x \in (-1, 1)$. Nemá bod $c \in (-1, 1)$ taký, že $f'(c) = 0$ (obr.13).

□

Veta 4.5.4. [Lagrangeova¹⁵ o strednej hodnote] Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a diferencovateľná na (a, b) . Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4.16)$$

Dôkaz. Definujme pomocnú funkciu

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Vzhľadom na predpoklady vety a viet 3.8.6 a 4.3.1 je funkcia F spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovateľná na (a, b) a $F(a) = F(b) = f(a)$. To znamená, že F spĺňa predpoklady Rolleovej vety a preto existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $F'(c) = 0$, t.j.

$$F'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

odkiaľ vyplýva vzťah (4.16).

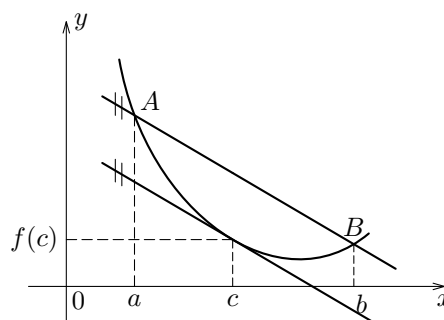
□

Geometrická interpretácia Lagrangeovej vety. Prepíšeme vzťah (4.16) do tvaru

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (4.17)$$

¹⁵Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – francúzsky matematik, mechanik, astronóm. Člen Berlínskej a Parížskej akadémie vied.

Ľavá strana (4.17) je smernica dotýčnice ku grafu funkcie f v bode $[c, f(c)]$. Pravá strana (4.17) je smernica sečnice prechádzajúcej bodmi $A = [a, f(a)]$, $B = [b, f(b)]$. Lagrangeova veta hovorí, že existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že dotýčnica ku grafu funkcie f v bode $[c, f(c)]$ je rovnobežná so sečnicou prechádzajúcou bodmi A, B (obr.14).



obr.14

Okrem tejto geometrickej aplikácie môžeme Lagrangeovu vetu použiť na odhad hodnôt funkcií, na dôkaz nerovností.

Príklad 4.5.5. Dokážeme, že pre každé $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí:

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

Riešenie. Na funkciu $f(x) = \arctg x$ a interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ (resp. $\langle x_2, x_1 \rangle$) použijeme Lagrangeovu vetu. Funkcia $\arctg x$ spĺňa predpoklady vety a preto existuje bod $c \in (x_1, x_2)$ taký, že

$$\arctg x_2 - \arctg x_1 = \frac{1}{1+c^2} (x_2 - x_1)$$

odkiaľ

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| = \frac{1}{1+c^2} |x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad \text{pre každé } x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

pretože $0 < \frac{1}{1+c^2} \leq 1$. □

Uvedieme niektoré dôležité dôsledky Lagrangeovej vety.

Dôsledok 4.5.6. *Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale (a, b) a pre každé $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$. Potom $f(x) = c = \text{konšt.}$ na (a, b) .*

Dôkaz. Nech x_0 je pevný bod, $x_0 \in (a, b)$ a x je ľubovoľný bod tohto intervalu. Použijeme Lagrangeovu vetu na funkciu f a interval s koncovými bodmi x_0, x . Dostaneme

$$f(x) - f(x_0) = f'(d)(x - x_0), \quad \text{kde } d \in (a, b).$$

Ale $f'(d) = 0$ a tak $f(x) = f(x_0) = c$ - konšt. pre každé $x \in (a, b)$. □

Príklad 4.5.7. Dokážme, že $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Riešenie. Pre funkciu $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ platí $f'(x) = 0$ pre $x \in (-1, 1)$ a podľa dôsledku 4.5.6 je $f(x) = c$ - konšt., $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Konštantu c určíme z niektorej funkčnej hodnoty, napr. $f(0) = \frac{\pi}{2} = c$. $\square$

Dôsledok 4.5.8. *Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na (a, b) a $f'(x) = g'(x)$ pre všetky $x \in (a, b)$. Potom $f(x) = g(x) + c$, c - konšt., $x \in (a, b)$.*

Dôkaz. Zostrojme funkciu $h(x) = f(x) - g(x)$. Vzhľadom na predpoklad je $h'(x) = 0$ na (a, b) a podľa dôsledku 4.5.6 je potom $h(x) = c$, c - konšt., t.j. $f(x) = g(x) + c$ na (a, b) . $\square$

Dôsledok 4.5.9. *Nech funkcie f, g sú diferencovateľné pre $x \geq x_0$ a vyhovujú podmienkam $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$ pre $x > x_0$. Potom $f(x) > g(x)$ pre $x > x_0$.*

Dôkaz. Použijeme Lagrangeovu vetu na funkciu $F(x) = f(x) - g(x)$ na intervale $\langle x_0, x \rangle$, $x > x_0$. Pretože $F(x_0) = 0$ dostaneme

$$F(x) = F'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x). \quad (4.18)$$

Ďalej $F'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$, $c > x_0$. Zo vzťahu (4.18) potom máme $F(x) > 0$, t.j. $f(x) > g(x)$ pre $x > x_0$. $\square$

Príklad 4.5.10. Dokážme, že $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ pre $x > 0$.

Riešenie. Položme $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Potom $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = 1 - x$ a pre $x > 0$ platí $\frac{1}{1+x} > 1 - x$ (dokážte). Podľa dôsledku 4.5.9 je potom $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ pre $x > 0$. $\square$

Dôsledok 4.5.11. *Nech funkcia f je definovaná na (a, b) , spojitá v bode $x_0 \in (a, b)$ a diferencovateľná na nejakom prstencovom okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0 . Nech existuje vlastná (alebo nevlastná) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = B$) potom existuje derivácia zľava (sprava) v bode x_0 a*

$$f'_-(x_0) = A \quad (f'_+(x_0) = B).$$

Dôkaz. Urobíme pre deriváciu zľava. Pre deriváciu sprava sa urobí analogicky. Nech $x < x_0$ a $x \in O^*(x_0)$. Podľa Lagrangeovej vety platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad c \in (x, x_0).$$

Ak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$, potom limita pravej časti poslednej rovnosti je A . Preto existuje limita ľavej časti rovnosti $f'_-(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = A$. $\square$

Veta 4.5.12. [Cauchyho veta o prírastku] Nech funkcie f, g majú vlastnosti:

- a) f, g sú spojité na $\langle a, b \rangle$;
- b) f, g sú diferencovateľné na (a, b) ;
- c) $g'(x) \neq 0$ pre všetky $x \in (a, b)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.19)$$

Dôkaz. Zoberme pomocnú funkciu

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Funkcia F spĺňa predpoklady Rolleovej vety a tak existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že

$$F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0. \quad (4.20)$$

Funkcia g spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety a tak existuje bod $d \in (a, b)$ taký, že $g(b) - g(a) = g'(d)(b - a) \neq 0$ podľa predpokladu 3). To znamená $g(b) \neq g(a)$, $g'(c) \neq 0$ a tak zo vzťahu (4.20) úpravou dostaneme (4.19). $\square$

Poznámka. O jednej geometrickej interpretácii Cauchyho vety sa zmienime v článku 4.9 „Funkcia daná parametricky“.

Cvičenie

1. Dokážte nasledujúcu vetu! Nech funkcia f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovateľná na (a, b) a $f'_+(a) < f'_-(b)$. Potom pre každé λ , ktoré vyhovuje podmienke $f'_+(a) < \lambda < f'_-(b)$ existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ taký, že $f'(c) = \lambda$.
2. Nech funkcia f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovateľná na (a, b) a pre všetky $x \in (a, b)$ platí $f'(x) = k$, k - konšt. Potom $f(x) = kx + B$, $x \in \langle a, b \rangle$, B - konšt. Dokážte!
3. Nech funkcia f má spojitú deriváciu f' na $\mathbb{R}$ a $f''(x) \geq 2$ pre $x > 0$. Ak $f(0) = f'(0) = 0$, potom pre každé $x > 0$ platí $f(x) \geq x^2$. Dokážte!
4. Dokážte nerovnosti:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &\leq |x - y| \quad \text{pre každé } x, y \in \mathbb{R}, \\ |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| &\geq |x - y| \quad \text{pre každé } x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

4.6 Použitie diferenciálneho počtu k vyšetrovaniu vlastností funkcií

V tomto článku využijeme doteraz získané poznatky z diferenciálneho počtu, ale aj z predchádzajúcich častí, na to, aby sme získali čo najviac informácií o danej funkcii. V jednotlivých odsekoch a)–d) uvedieme metódy, ktorými sa zisťujú niektoré vlastnosti funkcie.

4.6.1 Monotónnosť funkcie

V tomto odseku uvedieme vety, v ktorých z vlastností derivácie vieme určiť monotónnosť funkcie.

Nutná a postačujúca podmienka monotónnosti funkcie.

Veta 4.6.1. *Nech funkcia f je diferencovateľná na (a, b) . Funkcia f je neklesajúca (nerastúca) na (a, b) práve vtedy, ak $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) pre všetky $x \in (a, b)$.*

Dôkaz. Urobíme dôkaz pre prípad neklesajúcej funkcie. Dôkaz pre prípad nerastúcej funkcie sa urobí analogicky.

Nutná podmienka. Nech x_0 je ľubovoľný bod intervalu (a, b) . Funkcia f je neklesajúca na (a, b) a preto pre každé $x \in (a, b)$

$$\text{ak } x > x_0 \text{ platí } f(x) \geq f(x_0),$$

$$\text{ak } x < x_0 \text{ platí } f(x) \leq f(x_0).$$

Vzhľadom na tieto vlastnosti platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{pre každé } x \in (a, b), x \neq x_0. \quad (4.21)$$

Limita ľavej strany (4.21) pre $x \rightarrow x_0$ je rovná $f'(x_0)$ a tak limitným prechodom v nerovnosti (4.21) dostaneme $f'(x_0) \geq 0$.

Postačujúca podmienka. Nech $f'(x) \geq 0$ pre $x \in (a, b)$ a x_1, x_2 sú ľubovoľné body z intervalu (a, b) , $x_1 < x_2$. Použitím Lagrangeovej vety na funkciu f a na intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ dostaneme

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

kde $c \in (x_1, x_2)$ a $f'(c) \geq 0$. Z poslednej rovnosti potom dostávame, že

$$\text{pre každé } x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \text{ platí } f(x_1) \leq f(x_2),$$

čo znamená, že funkcia f je neklesajúca na (a, b) . □

Teraz uvedieme postačujúcu podmienku rýdzomonotónnosti funkcie

Veta 4.6.2. *Nech funkcia f je diferencovateľná na (a, b) a $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pre všetky $x \in (a, b)$. Potom je funkcia f rastúca (klesajúca) na (a, b) .*

Dôkaz. Urobíme dôkaz v prípade rastúcej funkcie. Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné body z intervalu (a, b) také, že $x_1 < x_2$. Podľa Lagrangeovej vety použitej na funkciu f na intervale $\langle x_1, x_2 \rangle$ platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, kde $c \in (x_1, x_2)$ a $f'(c) > 0$. Preto $f(x_2) > f(x_1)$ pre každé $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, t.j. f je rastúca na (a, b) . $\square$

Podmienka $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) na (a, b) nie je nutnou podmienkou k tomu, aby funkcia f bola rastúca (klesajúca) na (a, b) . Napr. funkcia $f(x) = x^3$ je rastúca na $\mathbb{R}$, no podmienka $f'(x) > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ nie je splnená, lebo $f'(0) = 0$.

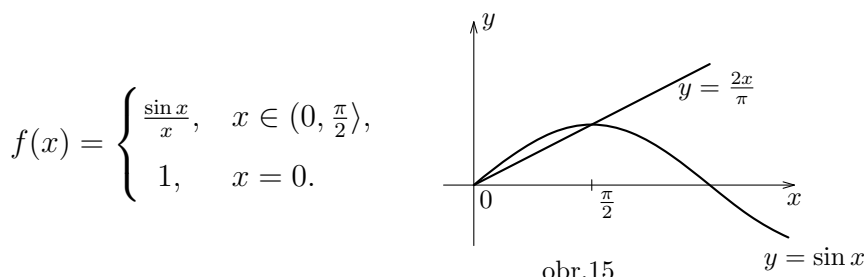
Príklad 4.6.3. Nájdime intervaly monotónnosti funkcie $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Riešenie. Funkcia f je diferencovateľná na $\mathbb{R}$ a $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Nerovnica $-\frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ platí pre každé $x \in (-\infty, 0)$ a nerovnica $-\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ platí pre každé $x \in (0, \infty)$. Podľa vety 4.6.2 je f rastúca na $(-\infty, 0)$ a klesajúca na $(0, \infty)$. $\square$

Ako ukazuje nasledujúci príklad, monotónnosť funkcie môžeme využiť aj pri dôkazoch nerovností.

Príklad 4.6.4. Dokážme, že ak $0 < x < \frac{\pi}{2}$, potom $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

Riešenie. Vyšetrimo funkciu



Funkcia f je spojitá na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, diferencovateľná na $(0, \frac{\pi}{2})$ (dokážte!). Pretože $\cos x > 0$, $\operatorname{tg} x > x$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$. To znamená, že funkcia f je klesajúca na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, teda $f(x) > f(\frac{\pi}{2})$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a tak $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, t.j. $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. $\square$

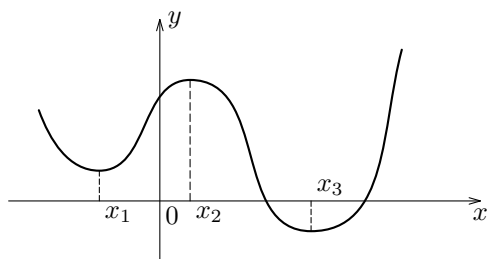
4.6.2 Extrémy funkcie

Vieme už, čo rozumieme pod extrémami funkcie na nejakej množine a máme vety, ktoré zaručujú ich existenciu. Tieto vety však nedávali návod ako extrém nájsť. Skôr ako sa k tomu dostaneme zavedieme pojem lokálneho extrému a podmienky jeho existencie.

Definícia 4.6.5. Nech funkcia f je definovaná na intervale I . Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ **lokálne maximum (lokálne minimum)**, ak existuje okolie bodu x_0 , $0(x_0) \subset I$ také, že pre všetky $x \in 0(x_0)$, $x \neq x_0$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)). \quad (4.22)$$

Ak v (4.22) platí ostrá nerovnosť $< (>)$, hovoríme o **ostrom lokálnom maxime (minime)**. Lokálne minimá a maximá sa spoločným názvom označujú ako **lokálne extrém**.



obr.16

Funkcia $f(x)$, ktorej graf je znázornený na obr.16, má v bodoch x_1 a x_3 lokálne minimum, v bode x_2 lokálne maximum.

Veta 4.6.6. [Fermatova¹⁶] Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b) , má v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálny extrém a je v tomto bode diferencovateľná. Potom $f'(x_0) = 0$.

Dôkaz. Nech funkcia f nadobúda v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálne minimum (pre lokálne maximum dôkaz urobíme podobne). Potom existuje okolie

bodu x_0 , $0(x_0) \subset (a, b)$ také, že

$$\text{ak } x \in 0(x_0), x \neq x_0 \text{ platí } f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

$$\text{Ak } x < x_0, x \in 0(x_0) \text{ potom } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad (4.23)$$

$$\text{a ak } x > x_0, x \in 0(x_0) \text{ potom } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (4.24)$$

¹⁶Pierre de Fermat (1601–1665) – francúzsky právnik a matematik. Zaoberal sa hlavne teóriou čísel, algebrou a pravdepodobnosťou.

Podľa predpokladu je funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 , tak existujú jednostranné limity pre $x \rightarrow x_0$ z ľavých strán nerovností (4.23) a (4.24). Vzhľadom na vlastnosti limit dostávame $f'_-(x_0) = f'(x_0) \leq 0$ a $f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$ a preto $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bod x_0 , v ktorom $f'(x_0) = 0$ sa nazýva **stacionárnym bodom**.

Poznámka. Podmienka $f'(x_0) = 0$ nie je postačujúcou podmienkou existencie lokálneho extrém. Napr. funkcia $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ nemá v bode $x_0 = 0$ lokálny extrém, pretože $f(0) = 0$, pre $x < 0$ je $x^3 < 0$ a pre $x > 0$ je $x^3 > 0$. Pritom $f'(0) = 0$.

Funkcia $f(x) = |x|$ má v bode $x = 0$ minimum a derivácia $f'(0)$ neexistuje.

Veta 4.6.6 hovorí, že funkcia f môže mať lokálne extrémy len v stacionárnych bodoch alebo v bodoch, v ktorých neexistuje prvá derivácia funkcie.

Nasledujúca veta dáva návod ako nájsť extrém spojitej funkcie na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 4.6.7. *Nech funkcia f je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Potom funkcia f nadobúda svoje maximum (minimum) v bode $c \in \langle a, b \rangle$, pre ktorý platí niektorá z nasledujúcich podmienok:*

1. $c = a$ alebo $c = b$,
2. $c \in (a, b)$ a $f'(c) = 0$,
3. $c \in (a, b)$ a neexistuje $f'(c)$.

Dôkaz. Podľa Weierstrassovej vety existuje bod $c \in \langle a, b \rangle$ taký, že $f(c) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$. Stačí ukázať, že ak $c \in (a, b)$ a existuje $f'(c)$ a $f'(c) \neq 0$, potom f nenadobúda v c maximum (minimum) na intervale $\langle a, b \rangle$. Podľa vety 4.6.6 však vieme, že za týchto predpokladov funkcia f nenadobúda v bode c lokálny extrém. Preto v ňom nenadobúda ani maximum (minimum) svojich hodnôt na $\langle a, b \rangle$. $\square$

Príklad 4.6.8. Nájdime najmenšiu a najväčšiu hodnotu (extrém) funkcie

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4| \text{ na intervale } \langle 0, 3 \rangle.$$

Riešenie. $f(0) = 4$, $f(3) = 2$.

Funkciu môžeme zapísať takto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x^2 - 5x + 4), & x \in (1, 3). \end{cases}$$

Vyšetríme diferencovateľnosť funkcie f . Podľa viet z diferenciálneho počtu

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \in (0, 1) \\ -(2x - 5), & x \in (1, 3). \end{cases} \quad (4.25)$$

Potrebuje vyšetrit' diferencovateľnosť v bode 1.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1||x - 4|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 4| = 3 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-|x - 4|) = -3. \end{aligned}$$

Keďže $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ funkcia f nie je diferencovateľná v bode 1, $f(1) = 0$.

Ostáva ešte zistiť body, v ktorých $f'(x) = 0$. Z (4.25) dostaneme, že $f'(5/2) = 0$ a $f(5/2) = 9/4$.

Podľa vety 4.6.7 najväčšia hodnota f na $\langle 0, 3 \rangle$ je $\max\{4, 2, 0, \frac{9}{4}\} = 4 = f(0)$, najmenšia hodnota je $\min\{4, 2, 0, \frac{9}{4}\} = 0 = f(1)$. $\square$

Vieme už určiť body, v ktorých funkcia môže nadobúdať lokálny extrém. Uvedieme teraz tvrdenia, pomocou ktorých sa dá určiť druh extrému, t.j. či je to maximum alebo minimum.

Veta 4.6.9. *Nech funkcia f je spojitá v bode x_0 a diferencovateľná na nejakom prsten-covom okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0 . Nech pre $x < x_0$, $x \in O^*(x_0)$ je $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] a pre $x > x_0$, $x \in O^*(x_0)$ je $f'(x) \leq 0$ [$f'(x) \geq 0$]. Potom funkcia f má v bode x_0 lokálne maximum (minimum).*

Dôkaz. Urobíme pre maximum. Nech x je ľubovoľný bod z $O^*(x_0)$ taký, že $x < x_0$. Funkcia f je spojitá na intervale $\langle x, x_0 \rangle$, diferencovateľná na (x, x_0) a podľa Lagrangeovej vety existuje bod $c \in (x, x_0)$ taký, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad \text{a} \quad f'(c) \geq 0.$$

Keďže $x - x_0 < 0$ dostávame odtiaľ, že

$$\text{pre všetky } x < x_0, x \in O^*(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0). \quad (4.26)$$

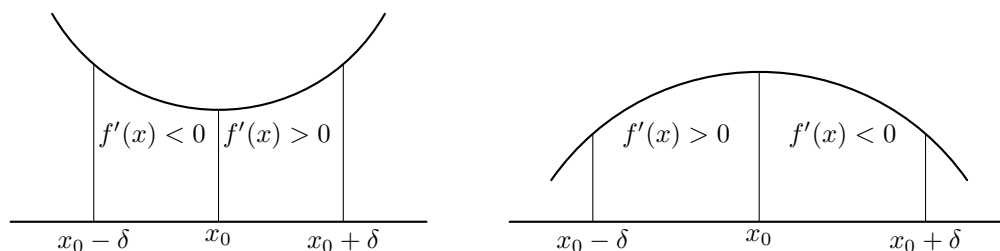
Podobne, ak použijeme Lagrangeovu vetu na funkciu f na intervale $\langle x_0, x \rangle$, kde $x > x_0$, $x \in O^*(x_0)$ dostaneme, že

$$\text{pre všetky } x > x_0, x \in O^*(x_0) \text{ platí } f(x) \leq f(x_0). \quad (4.27)$$

Z (4.26) a (4.27) vyplýva, že funkcia f má v bode x_0 lokálne maximum.

Analogicky sa dokáže veta v prípade minima. $\square$

Ak pre derivácie vo vete 4.6.9 platia ostré nerovnosti, potom funkcia f nadobúda v bode x_0 ostrý lokálny extrém (obr.17).



obr.17

Príklad 4.6.10. Dokážeme, že pre $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí nerovnosť

$$0 \leq \sin^3 x \cos x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}. \quad (4.28)$$

Riešenie. Označme $f(x) = \sin^3 x \cos x$. Potom platí

$$f(x) = \sin^2 x \sin x \cos x = \frac{1}{4} \sin 2x (1 - \cos 2x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x$$

a $f'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \sin x \cdot \sin 3x$. Rovnica $f'(x) = 0$ má na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ riešenie $x_0 = \frac{\pi}{3}$, pričom $f'(x) > 0$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ a $f'(x) < 0$ pre $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Podľa vety 4.6.9 má funkcia f v bode $\frac{\pi}{3}$ ostré lokálne maximum, a to $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Ďalšie lokálne extrémny môže mať funkcia f v krajných bodoch $f(0) = 0 = f(\frac{\pi}{2})$ - to je minimum funkcie f na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a tak pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ platí nerovnosť (4.28). $\square$

Veta 4.6.11. Nech x_0 je stacionárny bod funkcie f a existuje $f''(x_0)$. Potom

- a) ak $f''(x_0) > 0$, tak funkcie f má v bode x_0 ostré lokálne minimum,
- b) ak $f''(x_0) < 0$, tak funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Dôkaz. Nech x_0 je stacionárny bod, t.j. $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$. Podľa definície $f''(x_0)$ a vlastnosti limit (veta 3.6.3) existuje okolie $O^*(x_0)$ také, že ak

$$\begin{aligned} x < x_0, x \in O^*(x_0) & \text{ platí } f'(x) < f'(x_0) = 0 \\ \text{a } x > x_0, x \in O^*(x_0) & \text{ platí } f'(x) > f'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

čo podľa vety 4.6.9 znamená, že funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Analogicky sa dokáže prípad b). $\square$

Veta nedáva informáciu o extréme v prípade, že $f''(x_0) = 0$. Funkcia môže a nemusí mať extrém v takomto bode x_0 . Napr. funkcia $f(x) = x^4$ v bode $x_0 = 0$ má minimum ($f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$), ale funkcia $g(x) = x^3$ nemá v bode $x_0 = 0$ extrém ($g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$). Rozhodnúť o extréme v takýchto prípadoch môžeme pomocou vety 4.6.9 alebo pomocou nasledujúcej vety, ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 4.6.12. *Nech funkcia f má v bode x_0 prvých n derivácií, $n > 1$. Nech $f^{(k)}(x_0) = 0$ pre $0 < k < n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom funkcia f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém, ak číslo n je párne, a to ostré lokálne maximum, ak $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokálne minimum, ak $f^{(n)}(x_0) > 0$. Ak n je číslo nepárne, nemá funkcia f v bode x_0 lokálny extrém.*

Príklad 4.6.13. Funkcia $f(x) = x^4$ v bode $x_0 = 0$ má extrém, a to ostré lokálne minimum ($f'(x) = 4x^3|_{x=x_0} = 0$, $f''(x) = 12x^2|_{x=x_0} = 0$, $f'''(x) = 24x|_{x=0} = 0$, $f^{(4)}(x) = 24 > 0$, $n = 4$ – párne).

Funkcia $f(x) = x^3$ v bode $x_0 = 0$ nemá extrém, lebo $f' = 3x^2|_{x=0} = 0$, $f'' = 6x|_{x=0} = 0$, $f'''(x) = 6 > 0$, $n = 3$ – nepárne.

4.6.3 Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body

Najprv uveďme, čo budeme rozumieť pod pojmi konvexnosť a konkávnosť funkcie f na intervale I .

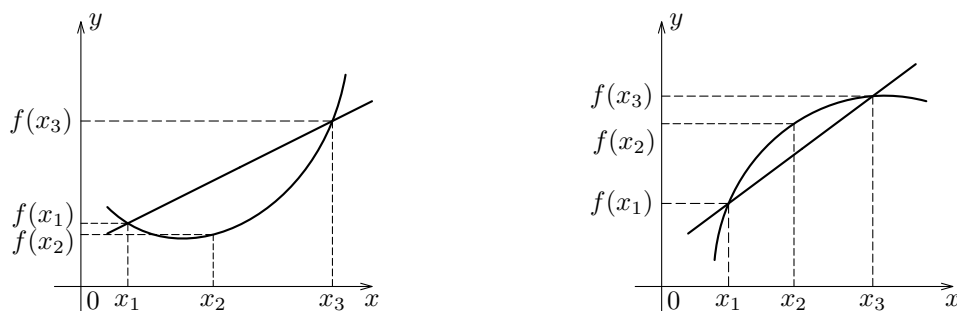
Definícia 4.6.14. Nech funkcia f je definovaná na intervale I . Hovoríme, že funkcia f je na intervale I **rýdzokonvexná**, ak pre každé tri body $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \quad (4.29)$$

Ak v definícii 4.6.14 v podmienke (4.29) nahradíme znak $<$ postupne znakmi $\leq$, $>$, $\geq$ dostaneme definície funkcie **konvexnej**, **rýdzokonkávnej** a **konkávnej** na intervale I .

V geometrickej interpretácii je význam vzťahu (4.29) nasledovný. Ak v (4.29) platí rovnosť, potom body grafu funkcie $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, $[x_3, f(x_3)]$ ležia na jednej priamke. Ak je funkcia rýdzokonvexná na I , leží bod $[x_2, f(x_2)]$ pod priamkou spájajúcou body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_3, f(x_3)]$. Ak je funkcia f rýdzokonkávna na I , leží bod $[x_2, f(x_2)]$ nad touto priamkou (obr.18).

Uvedieme tvrdenia, ktoré nám umožnia zavedené pojmy vyšetrovať. Najprv však poznamenajme (čitateľ ľahko overí sám), že nerovnosť (4.29) (so znakmi $<$, $>$, $\leq$, $\geq$) je



obr.18

ekvivalentná s nerovnosťou

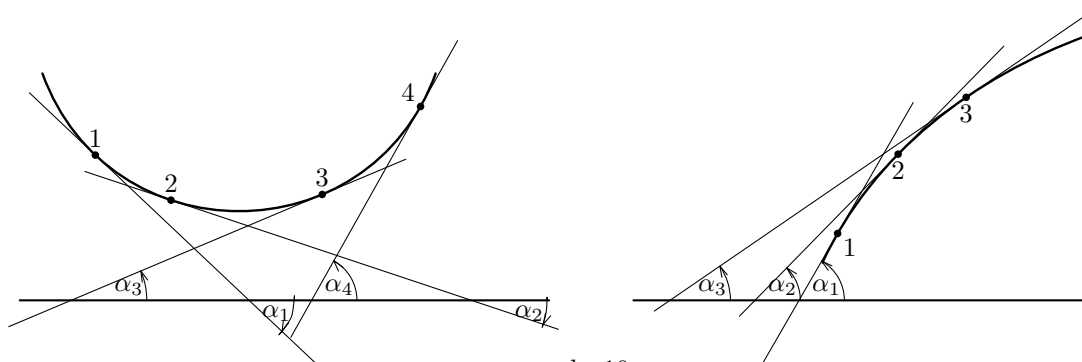
$$f(x_2)(x_3 - x_1) < f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_3 - x_1)$$

a tá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (4.30)$$

(s odpovedajúcimi znakmi nerovností), teda aj nerovnosti (4.29) a (4.30) sú ekvivalentné.

Veta 4.6.15. *Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale (a, b) . Potom funkcia f je konvexná (konkávna, rýdzokonvexná, rýdzokonkávna) na (a, b) práve vtedy, ak jej derivácia f' je neklesajúca (nerastúca, rastúca, klesajúca) na intervale (a, b) .*



obr.19

Dôkaz. Nech funkcia f je konvexná na intervale (a, b) . To znamená, že platí vzťah (4.30), pre každé $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$. Ak v tomto vzťahu urobíme limitný prechod pre $x_2 \rightarrow x_1$ dostaneme

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \quad (4.31)$$

a limitným prechodom pre $x_2 \rightarrow x_3$ opäť vo vzťahu (4.30 $\leq$) dostaneme

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'(x_3). \quad (4.32)$$

Spojením (4.31) a (4.32) máme, že pre každé $x_1, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_3$ platí $f'(x_1) \leq f'(x_3)$ čo znamená, že f' je neklesajúca na (a, b) .

Ak je funkcia f rýdzokonvexná platia tiež vzťahy (4.31) a (4.32), t.j. f' je neklesajúca na (a, b) . Ak navyše použijeme Lagrangeovu vetu máme z (4.30 $<$)

$$f'(x_1) \leq f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2) \leq f'(x_3)$$

pre $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$, t.j. f' je rastúca na (a, b) .

Postačujúca podmienka. Nech $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Podľa Lagrangeovej vety existujú body ξ_1, ξ_2 také, že $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2). \quad (4.33)$$

Ak derivácia f' je neklesajúca, potom $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, čo je vzhľadom na (4.33) podmienka (4.30 $\leq$) konvexnosti funkcie f . Ak f' je rastúca, potom $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, čo je podmienka (4.30 $<$) rýdzokonvexnosti funkcie f .

Dôkaz v prípade konkávnej a rýdzokonkávnej funkcie sa urobí analogicky. $\square$

Za predpokladu, že funkcia f je 2-krát diferencovateľná, tak vzhľadom na vety 4.6.1 a 4.6.2 môžeme vetu 4.6.15 preformulovať nasledovne.

Veta 4.6.16. *Nech funkcia f je na intervale (a, b) dvakrát diferencovateľná. Funkcia f je konvexná (konkávna) na intervale (a, b) práve vtedy, ak $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) na (a, b) .*

Ak $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) na intervale (a, b) , potom je f rýdzokonvexná (rýdzokonkávna) na (a, b) .

V prípade rýdzokonvexnosti (rýdzokonkávnosti) funkcie f podmienka $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) nie je nutnou podmienkou. Napr. funkcia $f(x) = x^4$ je rýdzokonvexná, jej derivácia $f'(x) = 4x^3$ je rastúca funkcia na $\mathbb{R}$. Avšak pre druhú deriváciu platí $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ na $\mathbb{R}$, lebo $f''(0) = 0$.

Pri zostrojovaní grafu funkcie f je potrebné poznať body, v ktorých sa mení „vypuklosť“ krivky, tzv. inflexné body.

Definícia 4.6.17. Nech existuje $\delta > 0$ také, že funkcia f je definovaná a diferencovateľná na intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ak na intervale $(x_0 - \delta, x_0)$ je funkcia f konvexná (konkávna) a na intervale $(x_0, x_0 + \delta)$ konkávna (konvexná) hovoríme, že bod x_0 je **inflexný bod** funkcie f .

Napr. funkcie $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (obr.6) majú v bode $x = 0$ inflexný bod.

Nutná podmienka pre inflexný bod.

Veta 4.6.18. Nech funkcia f má na nejakom okolí bodu x_0 druhú deriváciu, spojitú v bode x_0 . Ak x_0 je inflexný bod funkcie f , potom $f''(x_0) = 0$.

Dôkaz. Nech $f''(x_0) \neq 0$, t.j. $f''(x_0) > 0$ alebo $f''(x_0) < 0$. Nech $f''(x_0) > 0$. Zo spojitosti f'' v bode x_0 vyplýva existencia okolia bodu x_0 , $O(x_0)$ takého, že pre všetky $x \in O(x_0)$ je $f''(x) > 0$. Podľa vety 4.6.16 je funkcia f rýdzokonvexná na $O(x_0)$, čo je v spore s definíciou 4.6.17.

Dôkaz pre $f''(x_0) < 0$ sa urobí analogicky. □

Postačujúca podmienka pre inflexný bod.

Veta 4.6.19. Nech funkcia f je spojitá v bode x_0 a existuje $\delta > 0$ také, že funkcia f má na intervale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ druhú deriváciu. Ak $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) pre $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) pre $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, potom x_0 je inflexný bod funkcie f .

Dôkaz. Nech $f''(x) < 0$ pre $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ pre $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Podľa vety 4.6.16 je potom funkcia f konkávna na $(x_0 - \delta, x_0)$ a konvexná na $(x_0, x_0 + \delta)$ a to znamená, že x_0 je inflexný bod. □

Veta 4.6.20. Nech funkcia f je spojitá v bode x_0 a $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Potom f má v bode x_0 inflexný bod.

Dôkaz. Predpokladajme, že $f'''(x_0) > 0$. V prípade $f'''(x_0) < 0$ postupujeme analogicky. Pretože

$$f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

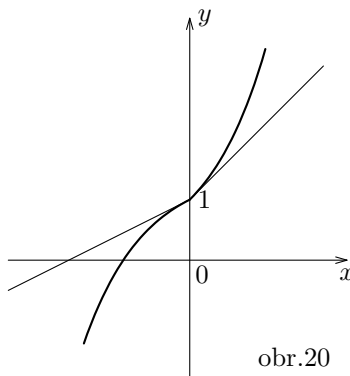
podľa vety 3.6.3 existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ platí

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \quad (f''(x_0) = 0).$$

Odtiaľ dostávame, že pre $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f''(x) < 0$ a pre $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f''(x) > 0$, čo podľa vety 4.6.19 znamená, že x_0 je inflexný bod. □

Príklad 4.6.21. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a inflexný bod funkcie

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}, & x < 0. \end{cases}$$



Riešenie. Určme prvú a druhú deriváciu funkcie f . Pre $x > 0$ je $f'(x) = e^x$ a pre $x < 0$ máme $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. Podľa dôsledku 4.5.12 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}$, to znamená, že $f'(0)$ neexistuje. Teda

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x < 0, \\ \text{neex.}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad f''(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-x}, & x < 0, \\ \text{neex.}, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme, že funkcia f je konvexná na intervale $(0, \infty)$ ($f''(x) > 0$) a konkávna na intervale $(-\infty, 0)$ ($f''(x) < 0$). Bod 0 nie je inflexný bod, pretože f nie je diferencovateľná v bode 0 (obr.20). $\square$

Veta 4.6.20 nedáva informáciu o inflexnom bode v prípade, keď $f'''(x_0) = 0$. Aj v tomto prípade, podobne ako u extrémov, nám pomôže buď veta 4.6.20 alebo nasledujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu.

Veta 4.6.22. Nech funkcia f má v bode x_0 prvých n derivácií, $n > 2$. Nech $f^{(k)}(x_0) = 0$ pre $k = 2, 3, \dots, n-1$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom funkcia f má v bode x_0 inflexný bod, ak n je číslo nepárne. Ak n je číslo párne, funkcia f nemá v bode x_0 inflexný bod.

Príklad 4.6.23. Funkcia $f(x) = x^6$ nemá v bode $x_0 = 0$ inflexný bod, lebo $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(5)}(x_0) = 0$, $f^{(6)}(x_0) = 6! \neq 0$ a 6-párne číslo.

Funkcia $g(x) = x^5$ má v bode $x_0 = 0$ inflexný bod, lebo $g'(x_0) = g''(x_0) = g'''(x_0) = g^{(4)}(x_0) = 0$, $g^{(5)}(x_0) = 5! \neq 0$, 5-nepárne číslo.

4.6.4 Asymptoty

Vieme už určiť veľa vlastností funkcie. K tomu, aby sme mohli nakresliť graf funkcie potrebujeme vedieť, ako sa správa funkcia pre x „dostatočne veľké“, poprípade v okolí bodov, v ktorých nie je definovaná. V tom nám pomôžu asymptoty grafu funkcie.

Definícia 4.6.24. Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $+\infty$ (resp. $-\infty$). Hovoríme, že priamka o rovnici $y = kx + q$ je **asymptotou so smernicou** grafu funkcie f v bode $+\infty$ ($-\infty$), ak $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0$).

Vzniká otázka, či existuje asymptota so smernicou grafu funkcie a ako ju vypočítať. Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta 4.6.25. a) Nech

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = q \quad (q \in \mathbb{R}). \quad (4.34)$$

Potom priamka daná rovnicou $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode ∞ .

b) Ak priamka o rovnici $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou v bode ∞ grafu funkcie f , potom $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Dôkaz. a) Nech existujú konečné limity v (4.34), potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((f(x) - kx) - q) = 0.$$

b) Nech $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$. Úpravou dostaneme

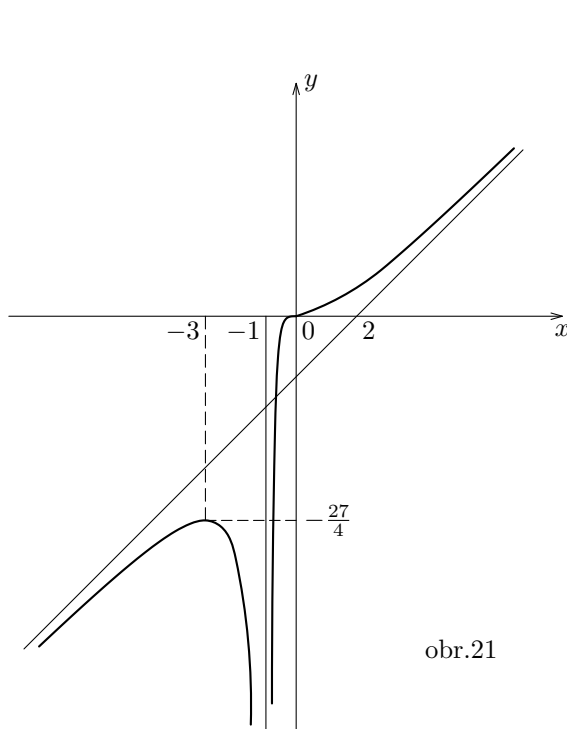
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \left(k + \frac{q}{x} \right) + k + \frac{q}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{q}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + k = k. \end{aligned}$$

Ďalej z rovnosti $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$ vyplýva, že $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. □

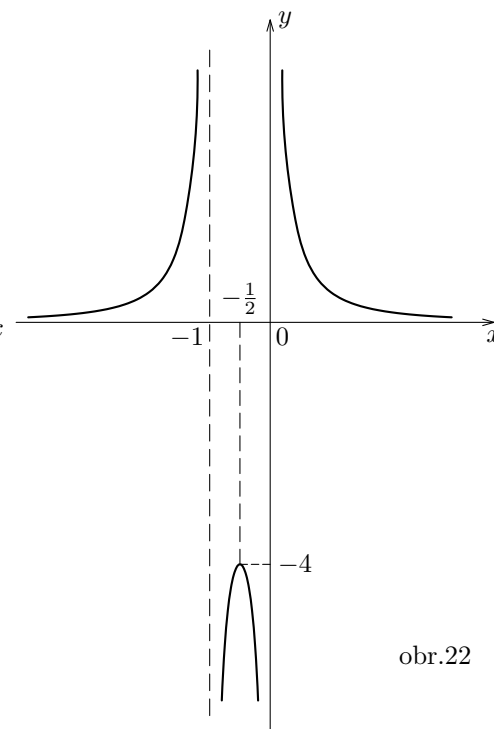
Podobné tvrdenie platí aj pre asymptotu so smernicou v bode $-\infty$. Sformulujte toto tvrdenie.

Príklad 4.6.26. Určme asymptoty so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$ a $-\infty$, ak

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$



obr.21



obr.22

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1, \quad \text{t.j.} \quad k = 1$$

$$\text{a tiež} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1, \quad \text{t.j.} \quad k' = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = -2, \quad \text{t.j.} \quad q = -2$$

a tiež $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - k'x) = -2$. Teda priamka $y = x - 2$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$ aj $-\infty$ (obr.21). $\square$

Medzi priamkami $y = kx + q$ sa nenachádza priamka $x = a$, rovnobežná s osou y . Táto priamka by tiež mohla byť asymptotou grafu funkcie.

Definícia 4.6.27. Priamku o rovnici $x = a$ nazývame **asymptotou bez smernice** grafu funkcie f , ak nastane aspoň jeden z týchto prípadov:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Príklad 4.6.28. Nájdime asymptoty bez smernice grafov funkcií

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x^2+1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Riešenie. a) Funkcia f nemá asymptotu bez smernice, pretože v každom reálnom čísle má vlastnú limitu.

b) Funkcia f môže mať nevlastnú limitu len v bodoch, v ktorých $x(x+1) = 0$, t.j. $x = 0$ a $x = -1$. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$. To znamená, že priamky o rovniciach $x = 0$, $x = -1$ sú asymptotami bez smernice grafu funkcie f (obr.22). $\square$

4.6.5 Pribeh funkcie

Teraz môžeme všetky získané poznatky zhrnúť a využiť pri vyšetrowaní základných vlastností danej funkcie a k nakresleniu jej grafu.

Vyšetrovaním priebehu funkcie rozumieme postupné riešenie nasledujúcich úloh:

1. Nájsť definičný obor a obor funkčných hodnôt funkcie f . Pre uľahčenie ďalšieho vyšetrowania je dobré vyšetriť ešte špeciálne vlastnosti a to párnosť, nepárnosť, periodičnosť, nulové body (t.j. body, pre ktoré $f(x) = 0$).
2. Rozhodnúť o spojitosti funkcie f na definičnom obore.
3. Vyšetriť asymptoty grafu funkcie (určiť limitné vlastnosti funkcie f v bodoch nespojitosti a v krajných bodoch definičného oboru).
4. Vyšetriť, v ktorých bodoch definičného oboru existuje derivácia, resp. nevlastná derivácia, a vypočítať ju.
5. Rozhodnúť o monotónnosti funkcie f .
6. Nájsť lokálne a absolútne extrémny, pokiaľ existujú.
7. Vyšetriť existenciu druhej derivácie funkcie f .
8. Rozhodnúť o konvexnosti a konkávnosti funkcie f , nájsť inflexné body funkcie f .
9. Nakresliť graf funkcie f .

V predchádzajúcich častiach sme odvodili tvrdenia, ktoré nám umožňujú jednotlivé úlohy vyriešiť. Nutnou podmienkou pri riešení týchto úloh je dobrá znalosť vlastností základných elementárnych funkcií.

Príklad 4.6.29. Vyšetrite pribeh funkcie $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Riešenie. 1. $D(f) = \mathbb{R}$ – je to zložená funkcia z funkcií $h(y) = \sqrt[3]{y}$ ($D(h) = \mathbb{R}$, $H(h) = \mathbb{R}$) a $g(x) = x^3 + x^2$ ($D(g) = \mathbb{R}$, $H(g) = \mathbb{R}$); $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$.

2. Je spojitá na celom definičnom obore, pretože (veta 3.8.11) obidve zložky sú spojité funkcie na $\mathbb{R}$. Jej oborom hodnôt je interval, a to $(-\infty, \infty)$, lebo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} = \infty$ (veta 3.9.10).

3. Asymptoty bez smernice nemá, pretože je spojitá na $\mathbb{R}$. Vypočítame asymptoty so smernicou.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Priamka $y = x + \frac{1}{3}$ je asymptotou so smernicou v bode $x = +\infty$ aj v bode $x = -\infty$ (ukážte, že je asymptotou v bode $x = -\infty$!).

4. Funkcia g je diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R}$ (polynóm), funkcia h je diferencovateľná v každom bode $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (príklad 4.3.5). Na základe vety 4.3.6 je funkcia f diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ a

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2)^{-2/3}(3x^2 + 2x) = \frac{1}{3}(x + 1)^{-2/3} \cdot x^{-1/3}(3x + 2), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Podľa dôsledku 4.5.11 platí

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty, \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \infty.$$

5. Derivácia existuje v každom bode $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ a v bode -1 má funkcia nevlastnú deriváciu $+\infty$. Preto

$$f'(x) > 0 \quad \text{pre } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -2/3) \cup (0, \infty),$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{pre } x \in (-2/3, 0).$$

Podľa vety 4.6.2 je funkcia f rastúca na intervaloch $(-\infty, -2/3)$, $(0, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-2/3, 0)$.

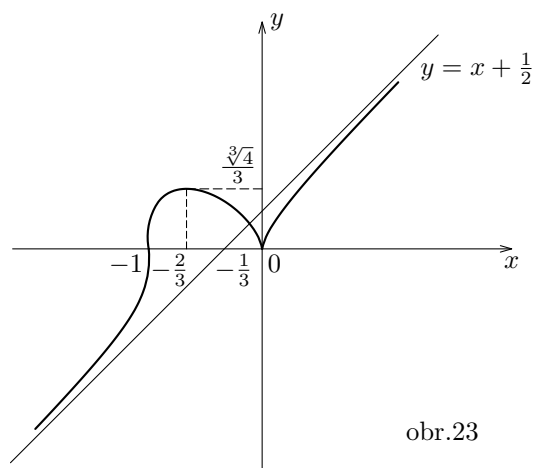
6. Funkcia môže mať extrém v bodoch, v ktorých je derivácia rovná nule alebo neexistuje. V našom prípade môže mať extrém v bodoch $x = 0$ (derivácia neexistuje), $x = -2/3$ (derivácia rovná nule). Podľa vety 4.6.9 má funkcia f v bode $x = -2/3$ lokálne maximum, a to $f(-2/3) = \sqrt[3]{4}/3$ a v bode $x = 0$ lokálne minimum, a to $f(0) = 0$.

7. Funkcia f má druhú deriváciu na $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a to

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x + 1)^{-5/3} \cdot x^{-4/3}. \quad (\text{Zdôvodniť!})$$

8. $f''(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, -1)$ a $f''(x) < 0$ pre $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$. Podľa vety 4.6.16 je funkcia f rýdzokonvexná na intervale $(-\infty, -1)$ a rýdzokonkávna na intervaloch $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$. Inflexný bod nemá.

9. Nakreslite graf (obr.23). □



Cvičenie

1. Nech funkcie f, g sú definované na intervale I a splňajú predpoklady:
 - a) Existuje $a \in I$ také, že pre všetky $x \in I, x > a$ existujú $f^{(n)}, g^{(n)}$ pričom $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$.
 - b) $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), k = 0, 1, \dots, n-1$.
 Potom $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in I, x > a$.
 - Dokážte!

2. Dokážte nerovnosti: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ pre $x < 0$,

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \text{ pre } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

3. Nech funkcia f je diferencovateľná na intervale I . Funkcia f je konvexná (konkávna) práve vtedy, ak jej graf na intervale I leží nad (pod) dotyčnicou v ľubovoľnom bode intervalu I . Dokážte!

4. Nech f je spojitá na (a, b) . Funkcia f je konvexná (konkávna) práve vtedy, ak

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right).$$

5. Vyšetrite priebeh nasledujúcich funkcií:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x+1|}{x+2}; f(x) = \frac{|x+(x+1)|}{x+2}; f(x) = x^{1/x}; f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|;$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}; f(x) = |x| \cdot e^{-|x-1|}; f(x) = \arcsin \sin x.$$

6. Dokážte, že rovnica $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ má len 1 reálny koreň.

7. Dokážte, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{2}{3} \leq \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leq 2$.

8. Rozhodnite, či existuje $\min f(x)$, $\max f(x)$ na množine A a nájdite ich:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad A = \langle -1, 5 \rangle; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \quad A = (0, 1).$$

4.7 L'Hospitalove pravidlá

V článku 3.7 sme si všimli, že v istých prípadoch nevieme rozhodnúť o hodnote limity a tým ani o jej existencii, či neexistencii. Sú to napr. limity podielu $\frac{f(x)}{g(x)}$ pre $x \rightarrow a$ ($a \in \bar{\mathbb{R}}$), keď obidve funkcie f, g majú buď nulovú limitu alebo nevlastnú limitu pre $x \rightarrow a$, t.j. limity typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Pre výpočet limit týchto typov používame L'Hospitalove pravidlá sformulované v nasledujúcich vetách.

Veta 4.7.1. *Nech $a \in \bar{\mathbb{R}}$ a funkcie f, g sú definované na prstencovom okolí bodu a , $O^*(a)$ a spĺňajú predpoklady:*

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
2. pre všetky $x \in O^*(a)$ existujú derivácie f', g' a $g'(x) \neq 0$;
3. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dôkaz. Označme $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Rozdeľme dôkaz do dvoch častí podľa toho, či $a \in \mathbb{R}$ alebo $a = +\infty$, resp. $a = -\infty$.

a) Nech $a \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Dôkaz pre limitu zľava je podobný. Spojenie obidvoch výsledkov dá tvrdenie vety. Dodefinujeme funkcie f, g v bode a .

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in O^*(a) \\ 0, & x = a \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \in O^*(a) \\ 0, & x = a \end{cases}.$$

Funkcie F, G sú spojité na $O(a)$ (vzhľadom na predpoklady 1) a 2)) a spĺňajú predpoklady Cauchyho vety na intervale $\langle a, x \rangle \subset O(a)$. Preto existuje bod $c \in (a, x)$ taký, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.35)$$

Ak $x \rightarrow a^+$, potom aj $c \rightarrow a^+$ a $\lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$. Z rovnosti (4.35) dostávame tvrdenie vety.

b) Nech $a = \infty$. Substitúciou $t = 1/x$ zobrazíme okolie bodu ∞ na pravé okolie bodu 0. Ak teraz označíme $F(t) = f(1/t)$, $G(t) = g(1/t)$ dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-f'(1/t) \cdot t^{-2}}{-g'(1/t) \cdot t^{-2}} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \quad \text{pre } t \neq 0.$$

Pretože

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

podľa už dokázanej časti je $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = A$ a teda $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Analogicky sa dokáže veta pre $a = -\infty$. □

Veta 4.7.1 platí aj pre jednostranné limity. Avšak pozor, ak neexistuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (po-
prípade jednostranné limity) z toho nevyplýva, že $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje. Ilustrujeme to na na-
sledujúcom príklade.

Príklad 4.7.2. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$.

Riešenie. Označme $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $g(x) = \sin x$. Funkcie f , g sú definované na prs-
tencovom okolí bodu 0, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Utvorme podiel derivácií,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje (dokážte!), pričom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{x}{\sin x} = 0.$$

□

L'Hospitalovo¹⁷ pravidlo sa dá použiť niekoľkonásobne. Dôkaz tvrdenia, ktoré sformu-
lujeme v nasledujúcej vete, prenechávame čitateľovi.

Veta 4.7.3. Nech funkcie f , g sú definované na prstencovom okolí bodu a , $O^*(a)$, a platí:

1. pre všetky $x \in O^*(a)$ existujú $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;

¹⁷Guillaume Francois de L'Hospital (1661–1704) – francúzsky matematik, žiak Johana Bernouliho. Bernouli napísal pre L'Hospitala učebnicu mat. analýzy, ktorú publikoval L'Hospital a tak vlastne uvedené pravidlá patria J. Bernoulimu.

2. funkcie $f^{(j)}, g^{(j)}, j = 0, 1, \dots, n-1$ sú spojité na $O^*(a)$ a $\lim_{x \rightarrow a} f^{(j)}(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} g^{(j)}(x) = 0, j = 0, 1, \dots, n-1$;
 3. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Príklad 4.7.4. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{a^x}, a > 1$.

Riešenie. Použijeme vetu 4.7.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{a^x \cdot \ln a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{a^x \cdot \ln^2 a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{a^x \cdot \ln^3 a} = 0.$$

□

Poznámka. Veta 4.7.1 ostane v platnosti, ak v nej predpoklad 1) nahradíme predpokladom $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty, \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$. Dôkaz tohto tvrdenia nebudeme robiť, čitateľ ho nájde v literatúre [5].

Ako je vidieť z uvedeného, L'Hospitalovo pravidlo možno používať na výpočet limit typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Dá sa však použiť aj na výpočet limit typov $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$, ktoré sa pomocou úprav dajú previesť na typy $\frac{0}{0}$ resp. $\frac{\infty}{\infty}$. Ukážeme niektoré úpravy.

1. **$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$** , pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

V tom prípade je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$ a môžeme písať $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$ a môžeme použiť vetu 4.7.1.

Príklad 4.7.5. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x, \alpha > 0$.

Riešenie.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\alpha \cdot x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\alpha} x^\alpha \right) = 0, \quad \alpha > 0.$$

□

2. **$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$** , pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Pre $x \in O^*(a)$ môžeme urobiť úpravu

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Limity čitateľa a menovateľa pre $x \rightarrow a$ sú v poslednom výraze rovné 0 a opäť môžeme použiť vetu 4.7.1.

Príklad 4.7.6. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

Riešenie.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ na nejakom okolí bodu a , a napr. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Vieme, že platí $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$. Vzhľadom na spojitost funkcie e^x stačí potom vypočítať $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$, čo je typ 1).

Príklad 4.7.7. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$.

Riešenie. Upravme $x^{1/x} = e^{1/x \ln x}$ a vypočítame $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$. Podľa vety 3.8.10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x \ln x} = e^0 = 1.$$

□

Cvičenie

1. Zistite, či existujú nasledujúce limity a vypočítajte ich:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2; & 2. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x}; \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}; & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}; & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e^x)}{\log(x^4 + e^{2x})}. \end{array}$$

4.8 Taylorov polynóm

Videli sme, napr. v leme 4.5.1 a v článku 4.6, že vlastnosti derivácie funkcie f v bode určujú vlastnosti funkcie v okolí tohto bodu. Dá sa očakávať, že čím vyššieho rádu derivácie dvoch funkcií budú mať rovnaké hodnoty v danom bode, tým lepšie jedna funkcia aproximuje druhú v okolí tohto bodu. Nás bude zaujímať aproximácia funkcie v okolí nejakého bodu polynómom.

Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu a a má vlastnú deriváciu n -tého rádu, teda existujú $f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Chceme nájsť polynóm T_n , pre ktorý $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \dots, n$. Platí veta:

Veta 4.8.1. *Nech funkcia f je definovaná na okolí bodu a a existuje $f^{(n)}(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje práve jeden polynóm stupňa najvyšš n (označme ho T_n), pre ktorý $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \dots, n$.*

Dôkaz. Nech $T_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, $b_i \in \mathbb{R}$ je polynóm najvyšš n -tého stupňa spĺňajúci predpoklad vety. Ukážeme, že sa dá zapísať v tvare

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n. \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i (a + (x-a))^i = b_0 + b_1(a + (x-a)) + \\ &+ b_2(a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2) + \dots + \\ &+ b_n \left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}(x-a) + \dots + (x-a)^n \right) = \\ &= (b_0 + ab_1 + a^2b_2 + \dots + a^n b_n) + \\ &+ \left(b_1 + 2ab_2 + \dots + \binom{n}{1} a^{n-1} b_n \right) (x-a) + \dots + b_n(x-a)^n, \end{aligned}$$

čo je tvar (4.36). Potom pre k , $0 \leq k \leq n$ dostávame

$$T_n^{(k)}(x) = a_k \cdot k! + a_{k+1}(k+1)k \dots 2(x-a) + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

a $T_n^{(k)}(a) = a_k \cdot k!$. Podľa predpokladu $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$, odkiaľ dostávame $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pre $k = 0, 1, \dots, n$. Keďže koeficienty a_k sú určené jednoznačne, polynóm spĺňajúci predpoklady vety existuje práve jeden. $\square$

Polynóm tvaru

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4.37)$$

nazývame **n -tým Taylorovým polynómom**¹⁸ funkcie f v bode a .

Príklad 4.8.2. Nájdite n -tý Taylorov polynóm funkcií $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$,
 $f(x) = \cos x$, $f(x) = \ln(1+x)$ v bode $a = 0$.

¹⁸Brook Taylor (1685–1731) – anglický matematik a filozof. Roku 1712 objavil a 1715 publikoval formulu rozkladu funkcie do mocninového rádu.

Riešenie.

Funkcia $f(x) = e^x$ má v bode $a = 0$ deriváciu ľubovoľného rádu a $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Môžeme zostrojiť n -tý Taylorov polynóm v bode a pre n ľubovoľné.

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$ má v bode $a = 0$ deriváciu ľubovoľného rádu, a to: $f^{(4k)}(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1$, $f^{(4k+2)}(0) = -\sin 0 = 0$, $f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a teda

$$T_n(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{kde } k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Čitateľ ľahko sám ukáže, že n -tý Taylorov polynóm funkcie

$$f(x) = \cos x \quad \text{je} \quad T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{kde } k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a že n -tý Taylorov polynóm funkcie

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{je} \quad T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

□

Ďalej nás bude zaujímať, či Taylorov polynóm v okolí bodu a , $O(a)$, dobre aproximuje funkciu f a akej chyby sa dopustíme, ak na okolí bodu a nahradíme funkciu f jej Taylorovým polynómom. Označme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in O(a).$$

Funkciu $R_n(x)$ budeme nazývať **zvyškom n -tého Taylorovho polynómu** funkcie f v bode a . O jeho základných vlastnostiach hovorí nasledujúca veta.

Veta 4.8.3. *Nech R_n je zvyšok n -tého Taylorovho polynómu funkcie f v bode a . Potom platí:*

1. $R_n(a) = R'_n(a) = \dots = R_n^{(n)}(a) = 0$;
2. existuje funkcia $\omega(x)$ spojitá v bode a taká, že

$$R_n(x) = (x-a)^n \omega(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0.$$

Dôkaz. Vlastnosť 1) je zrejmá. Vlastnosť 2) ukážeme, ak položíme

$$\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x = a, \\ \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} & \text{pre } x \neq a. \end{cases}$$

Vypočítame $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x)$ pomocou L'Hospitalovho pravidla

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_n(x)}{n(x-a)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} R_n^{(n)}(a) = 0 = \omega(a). \end{aligned}$$

□

Nasledujúca veta charakterizuje zvyšok n -tého Taylorovho polynómu.

Veta 4.8.4. [Taylorova] Nech funkcie f, g sú definované na nejakom okolí $O(a)$ bodu a . Nech f je n -krát diferencovateľná na $O(a)$ a má v každom bode $x \in O(a)$, $x \neq a$ $(n+1)$ -vú deriváciu. Nech g je spojitá na $O(a)$ a má pre $x \in O^*(a)$ deriváciu $g'(x) \neq 0$. Potom existuje číslo $\Theta \in (0, 1)$ také, že pre všetky $x \in O^*(a)$ platí

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\Theta)^n}{n!} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g'(a + \Theta(x-a))} f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a)). \quad (4.38)$$

Dôkaz. Nech $x \in O^*(a)$. Vyšetrujeme funkciu

$$F(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t), \quad t \text{ leží medzi } a \text{ a } x.$$

Platí

$$F(a) = T_n(x), \quad F(x) = f(x), \quad F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t). \quad (4.39)$$

Funkcie F, g spĺňajú v intervale o krajných bodoch a, x ($x \in O^*(a)$) predpoklady Cauchyho vety a teda existuje bod c ležiaci medzi a a x taký, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{(x-c)^n}{n!} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{g'(c)}. \quad (4.40)$$

Bod c ležiaci medzi bodmi a a x môžeme zapísať v tvare $c = a + \Theta(x-a)$, kde $\Theta \in (0, 1)$. Zo vzťahu (4.40) pomocou (4.39) dostaneme požadované tvrdenie (4.38). □

Ak za funkciu g zoberieme funkciu $g(t) = (x - t)^{n+1}$ je $g'(t) = -(n + 1)(x - t)^n$, $g(a) = (x - a)^{n+1}$, $g(x) = 0$ a zo vzťahu (4.38) dostaneme tvar zvyšku

$$L_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta(x - a)) \quad - \text{Lagrangeov tvar zvyšku.}$$

Ak za funkciu g zoberieme funkciu $g(t) = t$ dostaneme tvar zvyšku

$$C_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1} \cdot (1 - \Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \Theta(x - a)) \quad - \text{Cauchyho tvar zvyšku.}$$

Identita $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ sa nazýva **Taylorov vzorec**. Ak $a = 0$ polynóm (4.37) sa nazýva **Maclaurinov¹⁹ polynóm** a vzorec $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ **Maclaurinov vzorec**.

Taylorov (Maclaurinov) vzorec sa často používa pri numerických výpočtoch, pri približnom výpočte hodnôt.

Príklad 4.8.5. Vypočítajme hodnotu e s presnosťou 10^{-3} .

Riešenie. Podľa príkladu 4.8.2 a Taylorovho vzorca je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Zoberme Lagrangeov tvar zvyšku $L_n(x) = \frac{e^{\Theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0 < \Theta < 1$.

Ak chceme úlohu vyriešiť musíme n voliť tak, aby $L_n(1) = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$. Stačí zvoliť $n = 6$. Tým dostaneme $e \doteq 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!}$. $\square$

Príklad 4.8.6. S akou presnosťou vypočítame $\ln 2$, ak zoberieme 9-tý Taylorov polynóm.

Riešenie. Podľa príkladu 4.8.2 a Taylorovho vzorca je

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

pričom $R_n(x) = L_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta)^{n+1}}$.

Pre $x = 1$, $n = 9$ je $|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^9}{(9+1)(1+\Theta)^{10}} \right| < \frac{1}{10}$. To znamená $\ln 2 \doteq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9}$ s presnosťou 10^{-1} . $\square$

Ostáva nám ešte ukázať, že Taylorov polynóm najlepšie „lokálne“ aproximuje danú funkciu.

¹⁹Colin Maclaurin (1698–1746), školský matematik, žiak a nástupca Newtona.

Veta 4.8.7. *Nech funkcia f má v bode a konečnú deriváciu n -tého rádu a nech $Q_n(x)$ je polynóm stupňa menšieho alebo rovného n , pričom $Q_n(x) \neq T_n(x)$, kde $T_n(x)$ je n -tý Taylorov polynóm funkcie f v bode a . Potom existuje okolie $O(a)$ bodu a také, že pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ je $|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)|$.*

Dôkaz. Z Taylorovho vzorca a vety 4.8.3 je

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) = \omega(x)(x-a)^n, \quad \text{pričom} \quad \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0.$$

Polynóm Q_n zapíšeme v tvare $Q_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n$. Pretože $Q_n \neq T_n$, existuje aspoň jedno i , $0 \leq i \leq n$ také, že $b_i \neq \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$. Označme najmenší z týchto indexov j . Máme

$$\begin{aligned} f(x) - Q_n(x) &= f(x) - T_n(x) + T_n(x) - Q_n(x) = (x-a)^n \omega(x) + \\ &+ \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} - b_j \right) (x-a)^j + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - b_n \right) (x-a)^n. \end{aligned}$$

Pre $x \neq a$ je

$$\frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^j} = (x-a)^{n-j} \omega(x) + \left(\frac{f^{(j)}(a)}{j!} - b_j \right) + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} - b_n \right) (x-a)^{n-j},$$

odkiaľ

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^j} \right| = \left| \frac{f^{(j)}(a)}{j!} - b_j \right| > 0.$$

Ďalej vieme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^j} \right| = \lim_{x \rightarrow a} |(x-a)^{n-j} \omega(x)| = 0.$$

Z vety 3.6.4 vyplýva existencia prstencového okolia bodu a , $O^*(a)$ takého, že pre všetky $x \in O^*(a)$ platí

$$\left| \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^j} \right| > \left| \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^j} \right|.$$

Po vynásobení $|(x-a)^j|$ dostaneme tvrdenie vety. □

Cvičenie

1. Nájdite n -tý Taylorov polynóm funkcie f v bode a :

a) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $a = 0$, $n = 4$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $a = 0$;

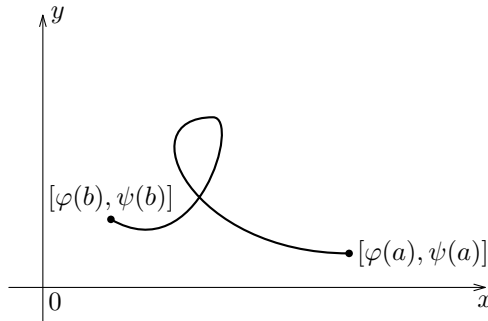
c) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $a = 0$, $n = 5$.

2. Vypočítajte $(1,1)^{(1,2)}$ a určte chybu.

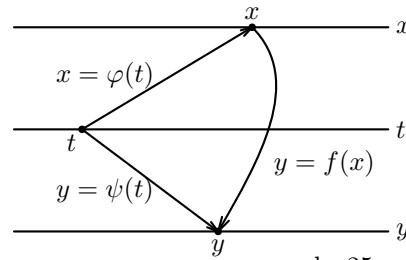
3. Určte $\sin 10^\circ$ s presnosťou 10^{-5} .
4. Dokážte, že: a) $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;
 b) $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ pre $x > 0$.

4.9 Funkcia daná parametricky

V mechanike, pri štúdiu pohybu hmotného bodu v nejakom časovom intervale je v danom časovom okamihu určená poloha bodu $[x, y]$, v ktorom sa hmotný bod nachádza. Súradnice bodu $[x, y]$ sú závislé na čase t . Pohyb daného hmotného bodu je určený dvojicou funkcií $[\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in \langle a, b \rangle$ (obr.24). Rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ sú parametrické rovnice dráhy pohybujúceho sa hmotného bodu.



obr.24



obr.25

Nech je daný systém funkcií

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in M \subset \mathbb{R}. \quad (4.41)$$

Definícia 4.9.1. Množinu bodov $[\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in M$ nazývame **krivkou** alebo **čiarou danou parametricky**. Funkcie (4.41) sú parametrickým vyjadrením tejto krivky.

Napr. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je parametrické vyjadrenie kružnice so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 2 ($x^2 + y^2 = 4$). Táto krivka však nie je grafom funkcie. Zaujímá nás, za akých podmienok budú funkcie v (4.41) určovať funkciu $y = f(x)$.

Veta 4.9.2. Nech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je parametricky daná krivka. Nech funkcia φ je prostá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ s oborom hodnôt A . Potom existuje funkcia $y = f(x)$ definovaná na množine A taká, že množina bodov $[x, y] = [\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je grafom funkcie f .

Dôkaz. Keďže funkcia φ je prostá a zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na množinu A , existuje k nej inverzná funkcia $t = \bar{\varphi}(x) : A \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$. Zložená funkcia $\psi(\bar{\varphi}(x)) = f(x)$ je hľadaná funkcia, ktorej definičným oborom je množina A (obr.25). $\square$

Dôkaz vety 4.9.2 zároveň dáva návod ako prejsť od parametrického vyjadrenia funkcie f k jej analytickému vyjadreniu $y = f(x)$. Tento prechod nazývame vylúčenie parametra.

Príklad 4.9.3. Rovnice

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \quad (4.42)$$

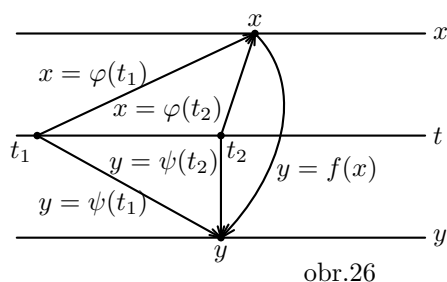
sú parametrické rovnice funkcie.

Riešenie. : Funkcia $x = 2 \cos t$ je prostá na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ a zobrazuje ho na interval $\langle -2, 2 \rangle$. Má inverznú funkciu $t = \varphi(x) = \arccos \frac{x}{2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Systémom funkcií (4.42) je daná parametricky funkcia, ktorej analytické vyjadrenie je $y = f(x) = 2 \sin(\arccos \frac{x}{2}) = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$. $\square$

Prechod od analytického vyjadrenia funkcie $y = f(x)$ k systému (4.41) sa nazýva parametrizácia danej funkcie. Každá funkcia môže byť parametrizovaná viacerými spôsobmi. Najjednoduchší je: $x = t$, $y = f(t)$, t.j. za parameter t sa zoberie priamo x . Napr. funkcia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in \langle -a, a \rangle$, $a > 0$ môže byť parametrizovaná:

1. $x = t$, $y = \sqrt{a^2 - t^2}$, $t \in \langle -a, a \rangle$;
2. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Poznámka. Existencia inverznej funkcie $t = \bar{\varphi}(x)$ je postačujúcou, nie však nutnou podmienkou k tomu, aby systém (4.41) definoval y ako funkciu x . Môže sa stať, že rôznym hodnotám t_1, t_2 , ktorým je priradené to isté x , je priradená tá istá hodnota y (obr.26).



obr.26

Ak by sme vedeli ku každej parametricky danej funkcii nájsť jej analytické vyjadrenie, tak k vyšetrovaniu vlastností takto daných funkcií by sme vystačili s doterajšími poznatkami. Avšak nájsť analytické vyjadrenie funkcie, ako už vieme, znamená nájsť inverznú funkciu k funkcii $x = \varphi(t)$ zo (4.41) a tento problém nevieme vždy vyriešiť. Napr. funkcia

$x = \sin t + t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je prostá a má inverznú funkciu, avšak jej analytické vyjadrenie nevieme nájsť. Keďže viaceré vlastnosti funkcie súvisia s vlastnosťami jej derivácií, ukážeme ako sa derivujú parametricky dané funkcie.

Veta 4.9.4. *Nech funkcie $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sú diferencovateľné v bode $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\varphi'(t_0) \neq 0$. Potom funkcia $f(x)$ daná parametricky systémom (4.41) je diferencovateľná v bode $x_0 = \varphi(t_0) \in (a, b)$ a platí*

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right)$$

Dôkaz. Funkcia $f(x)$, ktorá je daná parametricky systémom funkcií φ , ψ , má analytické vyjadrenie $y = f(x) = \psi(\bar{\varphi}(x))$. Keďže $\varphi'(t_0) \neq 0$, má inverzná funkcia $\bar{\varphi}$ deriváciu v bode $x_0 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a podľa vety o derivácii zloženej funkcie (veta 4.3.6) a inverznej funkcie (veta 4.3.4) platí

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \psi'(\bar{\varphi}(x_0))(\bar{\varphi}(x_0))' = \psi'(t_0) \cdot \frac{1}{\varphi'(t_0)}.$$

□

Je potrebné si uvedomiť, že $\frac{df}{dx}$ je vyjadrená pomocou parametra t , to znamená, že systém funkcií

$$x = \varphi(t), \quad y = \left(\frac{df}{dx} = \right) \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in I \subset (\alpha, \beta)$$

dáva parametrické vyjadrenie derivácie, kde I je interval taký, že pre každé $t \in I$ sú splnené predpoklady vety 4.9.4.

Ukážeme ďalej, ako to formálne vyzerá s deriváciami vyšších rádo.

V článku 4.4 sme sa dozvedeli, že druhá derivácia funkcie je vlastne derivácia prvej derivácie danej funkcie, a vo všeobecnosti n -tá derivácia funkcie ($n \in \mathbb{N}$) je definovaná ako derivácia $(n-1)$ -tej derivácie danej funkcie. Uplatnením tejto definície na funkciu f danú parametricky systémom funkcií (4.41) zistíme, že

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

a teda druhá derivácia funkcie f danej parametricky funkciami (4.41) má parametrické vyjadrenie

$$x = \varphi(t), \quad y = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}, \quad t \in I_1.$$

Vo všeobecnosti, pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, je n -tá derivácia funkcie f daná parametricky rovnicami

$$x = \varphi(t), \quad y = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) \frac{dt}{dx}, \quad t \in I_1.$$

Tu znakom I_1 rozumieme taký interval, na ktorom existujú príslušné derivácie funkcií φ , ψ a navyše $\varphi' \neq 0$.

Príklad 4.9.5. Načrtnime krivku danú parametricky rovnicami

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3. \quad (4.43)$$

Riešenie. : Systém (4.43) definuje y ako spojitú funkciu x na tých intervaloch, kde x je rýdzomonotónna a spojitá funkcia t a tiež y je spojitá funkcia t . Určíme intervaly, na ktorých je $x(t)$ rýdzomonotónna

$$x'(t) = 2 - 2t; \quad x'(t) > 0 \text{ pre } t \in (-\infty, 1); \quad x'(t) < 0 \text{ pre } t \in (1, \infty).$$

Zistili sme, že funkcia $x(t)$ je spojitá a rastúca na intervale $(-\infty, 1)$ a spojitá a klesajúca na intervale $(1, \infty)$. Funkcia $y(t)$ je spojitá v každom bode týchto intervalov. To znamená, že systém (4.43) definuje dve funkcie $y_1(x)$, $y_2(x)$, ktoré sú parametricky dané systémom (4.43) postupne na intervaloch $t \in (-\infty, 1)$, $t \in (1, \infty)$. Pre každú z týchto funkcií na príslušnom intervale máme

$$y'(t) = 3 - 3t^2; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t). \quad (4.44)$$

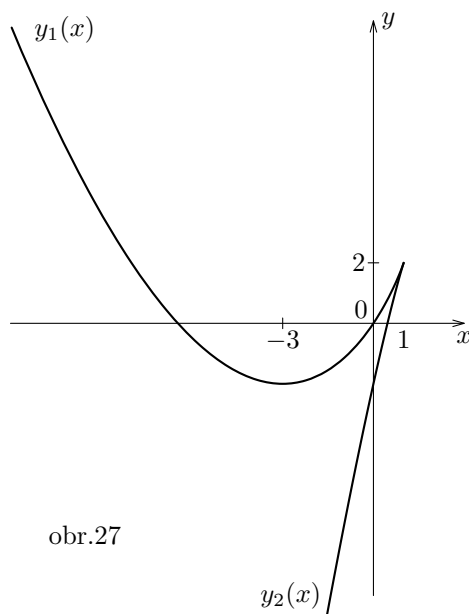
Vyšetríme vlastnosti funkcií $y_1(x)$, $y_2(x)$. Funkcia $x(t) = 2t - t^2$ zobrazuje interval $(-\infty, 1)$ na interval $(-\infty, 1)$, to znamená, že definičným oborom funkcie $y_1(x)$ je interval $(-\infty, 1)$. Keďže $\frac{dy}{dx} = 0$ pre $t_0 = -1 \in (-\infty, 1)$ je bod $x_0 = 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = -3$ stacionárny bod funkcie $y_1(x)$. Ďalej zo (4.44) máme $\frac{dy_1}{dx} > 0$ pre $t \in (-1, 1)$ a $\frac{dy_1}{dx} < 0$ pre $t \in (-\infty, -1)$. Funkcia $x(t)$ zobrazuje: $(-1, 1) \rightarrow (-3, 1)$ a $(-\infty, -1) \rightarrow (-\infty, -3)$, preto funkcia $y_1(x)$ je rastúca na intervale $(-3, 1)$ a klesajúca na intervale $(-\infty, -3)$. Podľa vety 4.6.9 má funkcia $y_1(x)$ v bode $x_0 = -3$ lokálne minimum, a to $y_0 = 3 \cdot (-1) - (-1)^3 = -2$. Pre funkciu $y_2(x)$ dostaneme:

- a) je definovaná na intervale $(-\infty, 1)$,
- b) je rastúca na intervale $(-\infty, 1)$.

Pre druhú deriváciu platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3/2(1+t))'}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)}, \quad x = 2t - t^2, \quad (4.45)$$

pričom pre funkciu $y_1(x)$ je $t \in (-\infty, 1)$ a pre funkciu $y_2(x)$ je $t \in (1, \infty)$. Zo vzťahu (4.45) máme, že $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ pre $t \in (-\infty, 1)$ a $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ pre $t \in (1, \infty)$. To znamená, že funkcia $y_1(x)$



obr.27

je konvexná na intervale $(-\infty, 1)$ a funkcia $y_2(x)$ je konkávna na svojom definičnom obore, t.j. na intervale $(-\infty, 1)$.

Vyšetříme ešte nulové body funkcií $y_1(x)$, $y_2(x)$ a ich asymptotické vlastnosti. Zo systému (4.43) dostaneme

$$y(t) = 0 \text{ pre } t = 0, \sqrt{3}, \sqrt{-3} \text{ a } x(0) = 0, x(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3, x(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} - 3.$$

To znamená, funkcia $y_1(x)$ má nulové body $(-2\sqrt{3} - 3, 0)$, $(0, 0)$ a funkcia $y_2(x)$ má nulový bod $(2\sqrt{3} - 3, 0)$.

Ďalej z rovníc (4.43) máme, že $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow -\infty$ a $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ pre $t \rightarrow \infty$ a tak $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$ pre $t \rightarrow 1$. $\square$

Ukončíme tento článok splnením prísľubu z poznámky v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.9.6. Ukážme, že Cauchyho vetu (veta 4.5.12) možno geometricky interpretovať rovnako ako sme interpretovali Lagrangeovu vetu.

Riešenie. : Nech funkcia f je daná parametricky rovnicami

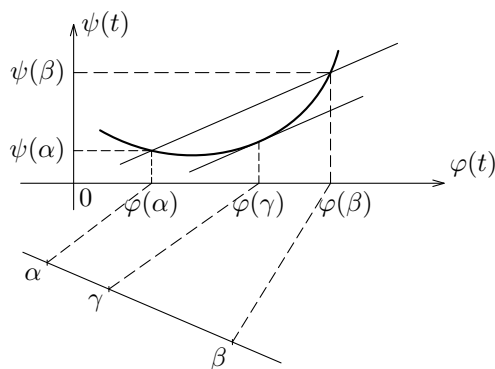
$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Nech funkcie $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ sú spojité $\langle \alpha, \beta \rangle$ a majú derivácie $\varphi'(t)$ a $\psi'(t)$ na (α, β) . Nech (pre lepšiu názornosť) $\varphi'(t) > 0$ pre každé $t \in (\alpha, \beta)$. Potom funkcie $\varphi(t)$, $\psi(t)$

spĺňajú predpoklady Cauchyho vety a funkcia f spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$. To znamená (v zmysle geometrickej interpretácie Lagrangeovej vety), že existuje $\gamma \in (\alpha, \beta)$ také, že smernica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[\varphi(\gamma), \psi(\gamma)]$ je rovná smernici priamky p prechádzajúcej bodmi $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)]$, $[\varphi(\beta), \psi(\beta)]$. Keďže smernica priamky p je $\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}$ a smernica spomínanej dotyčnice je rovná hodnote derivácie funkcie f v bode γ , čo je $\frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}$, tak máme

$$\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)}, \quad \gamma \in (\alpha, \beta).$$

Teraz je zrejmé, že Cauchyho veta má ten istý geometrický význam pre funkcie dané parametricky ako Lagrangeova veta pre funkcie dané analyticky. $\square$



Cvičenie

- Nájdite funkciu, ktorá je parametricky určená rovnicami $x = 8t^2 - 7$, $y = 16t^2 - 1$.
- Nájdite prvú až tretiu deriváciu funkcie danej parametricky systémom rovníc $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$.
- Nájdite dotyčnicu ku grafu funkcie danej parametricky:
 - $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ v bode $t_0 = \frac{3\pi}{2}$;
 - $x = t^2 - 4t + 4$, $y = t^2 - 3t + 2$ v bode $A = [1, 0]$.
- Vyšetrte priebeh funkcie danej parametricky:
 - $x = te^t$, $y = te^{-t}$;
 - $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Použitá literatúra

- [1] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differencialnovo i integralnovo isčislenija I*, Nauka, Moskva 1962.
- [2] Grebenča, M. K.– Novoselov S. I.: *Učebnice matematické analysy 1*, ČSAV, Praha 1955.
- [3] Il'jin, V. A.– Poznjak, E. G.: *Osnovy matematičeskovo analiza I*, Nauka, Moskva 1971.
- [4] Bero, P.–Riečan, B.: a^x , *Matematické obzory* 32, 1989
- [5] Jarník, V.: *Diferenciálny počet I*, Academia, Praha 1955.
- [6] Kluvánek, I.– Mišík, M.– Švec, M.: *Matematika I*, Alfa, Bratislava 1971.
- [7] Slupeckij, E.–Slupeckij, L.: *Elementy matematičeskoy logiky i teorija množestv*, Progress, Moskva 1965.
- [8] Šilov, G. J.: *Matematická analýza*, Alfa, Bratislava 1974.
- [9] Ter-Krikorov, A. M.– Šabunin, M. I.: *Kurs matematičeskovo analiza*, Nauka, Moskva 1988.