UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

Ondrej HUTNÍK

URČITÝ INTEGRÁL

Učebné texty

Košice 2012

URČITÝ INTEGRÁL

Vysokoškolské učebné texty

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

Recenzenti: doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc.

doc. RNDr. Ján Haluška, CSc.

Vydavateľ: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Umiestnenie: http://www.upjs.sk/pracoviska/univerzitna-kniznica/e-publikacia/♯pf

Dostupné od: január 2012

Za odbornú a jazykovú stránku tejto publikácie zodpovedá autor. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7097-929-7

Obsah

Úvod

„Nejestvuje nič, čo by neprekonala usilovná práca a vytrvalé úsilie.“

Seneca

Pojem integrálu je jedným z najvýznamnejších pojmov v matematike vôbec. V najprimitívnejšej podobe ho používali už starí Gréci pri tvorbe euklidovskej geometrie. No až po Descartovom diele o analytickej geometrii z roku 1637 mohli matematici začať považovať integrál za predmet analýzy. Descartova práca pripravila podmienky pre objav infinitezimálneho počtu Leibnizom a Newtonom okolo roku 1665. V tom čase vznikol veľký spor o prvenstvo tohto objavu, čo rozdelilo učencov Nemecka a Anglicka do dvoch bojujúcich táborov, z ktorých každý fandil svojmu favoritovi. Dnes vieme, že Newtonova práca o fluxiách a fluentoch bola o niečo skoršia, ale Leibnizovo označenie a prístup sa v matematickom svete ujali viac a symboly $\int$ a d sa používajú dodnes. Stručný prierez históriou integrálu bude uvedený v Kapitole 1.

Dnes existuje celá hromada skrípt, učebníc, či kníh venovaných výkladu pojmu integrál. Preto pred prvú otázku, či napísať ďalší text o tejto problematike, je postavený každý potenciálny autor. Nás ku kladnej odpovedi na túto otázku doviedla požiadavka študentov nájsť v určitej ucelenej podobe prednášanú problematiku časti zimného semestra druhého ročníka. Druhou motiváciou je trochu odlišný prístup k problematike. Ak si totiž uvedomíme, ktoré metódy sa zvyčajne používajú pri riešení úloh a získavaní rutiny z určitého integrálu, ide hlavne o Newtonovu-Leibnizovu formulu a častokrát na výpočet určitého (Riemannovho) integrálu pomocou definície nezostáva veľa času. Preto sme zaradili pojednanie o Newtonovom integráli v Kapitole 2, ktorý reflektuje túto skutočnosť a má priamy súvis s neurčitým integrálom, ktorého rôznym metódam výpočtu sa venuje relatívne veľa pozornosti v predchádzajúcom semestri. Až za tým v Kapitole 3 vybudujeme teóriu Riemannovho integrálu, uvedieme kritériá jeho existencie, triedy integrovateľných funkcií, základné vlastnosti a nakoniec vzťah s Newtonovým integrálom. Otázky prevažne geometrických aplikácií riešime v Kapitole 4 a v poslednej kapitole sa venujeme rozšíreniu Riemannovho integrálu pre neohraničené funkcie a neohraničené intervaly.

Ako sme už uviedli, cieľom tohto učebného textu je poslúžiť študentom pri štúdiu matematickej analýzy, hlavne pri jej štúdiu v učiteľských kombináciách, čo však nevylučuje jeho použitie aj v iných študijných odboroch. To ovplyvnilo aj spôsob výkladu, kde popri exaktných metódach častokrát upozorňujeme aj na historické aspekty a súvislosti preberaného učiva. Veríme, že motivácia k niektorým zavedeným pojmom a množstvo príkladov poslúži študentom k lepšiemu pochopeniu a uvedomeniu si niektorých súvislostí, ktoré miestami len naznačíme, pretože tento text ani zďaleka nevyčerpáva obsah problematiky.

Je milou povinnosťou autora poďakovať recenzentom doc. RNDr. Božene Mihalíkovej, CSc. a doc. RNDr. Jánovi Haluškovi, CSc. za viaceré cenné pripomienky, ktorými prispeli k celkovému vylepšeniu učebného textu. Taktiež patrí autorovo poďakovanie Mgr. Lenke Halčinovej za starostlivé prečítanie a korekciu predchádzajúcich verzií textu. Napokon autor ďakuje kolektívu vydavateľstva UPJŠ za konečné úpravy tejto učebnice.

Košice, december 2011 Autor

Kapitola 1

O vývoji pojmu integrál

Starovek – predpoklady vzniku

Obsahy niektorých rovinných útvarov sa učia deti počítať už v základnej škole. Malým problémom je, že každý takýto útvar má svoj vlastný vzorec. V Kapitole 4 sa okrem iného budeme zaoberať aj spresnením pojmu obsah pre ohraničené rovinné útvary. Dovtedy budeme pojem *obsah rovinného útvaru* chápať len intuitívne.

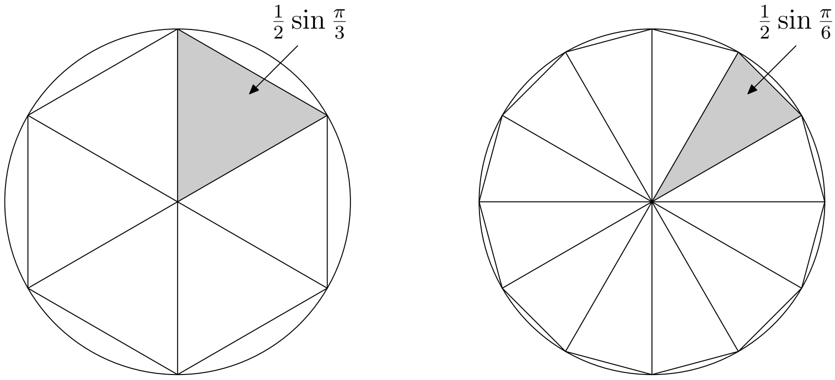
Práve potreba určenia veľkosti plôch a objemov rôznych útvarov bola jednou z hybných síl vzniku a vývoja matematiky. História matematických techník, ktoré súvisia s týmito otázkami, je veľmi stará. Napríklad HERODOTOS (najstarší grécky dejepisec) v 5. storočí pred naším letopočtom popisoval situáciu, ako bola poľnohospodárska pôda pozdĺž Nílu v starom Egypte zdaňovaná podľa plošnej veľkosti a ako boli každý rok povodňami odplavované časti pozemkov. Majiteľ pôdy tak pochopiteľne žiadal zníženie daní a úlohou vyberateľov daní bolo zistiť, koľko pôdy odplavila voda, prípadne koľko jej zostalo. To si vyžadovalo isté zememeračské poznatky, pretože skrotiť veľkú vodu nebolo možné a z poľnohospodárskej pôdy odhrýzala nepravidelné, rôzne zakrivené útvary. V starom Grécku sa techniky vymeriavania stále zdokonaľovali. Princíp určovania obsahu útvarov so zakrivenými hranicami sa pripisuje EUDOXOVI[1], ktorý bol žiakom Platónovej Akadémie v Aténach. Eudoxov princíp sa niekedy nazýva i *exhaustívny* (t.j. princíp postupného vyčerpávania).

Z intuitívnych dôvodov bolo Eudoxovi jasné, že plošný obsah útvarov v rovine je *monotónny* v tom zmysle, že ak útvar A je časťou útvaru B, potom plošný obsah útvaru A nemôže byť väčší ako obsah útvaru B, a že má vlastnosť *aditivity*, t.j. ak útvar C je zjednotením dvoch neprekrývajúcich sa útvarov A a B, tak plošný obsah útvaru C je súčtom plošných obsahov útvaru A a útvaru B.

Pre daný rovinný útvar A s krivočiarou hranicou sa potom Eudoxos snažil určiť jeho plošný obsah tak, že útvar A postupne „vyčerpával" mnohouholníkmi (polygónmi) $M_1, M_2, \ldots$, ktoré doň postupne vpisoval tak, že z pôvodného útvaru A zostávalo stále menej nevyčerpanej časti. Plošný obsah polygónu dokázali Gréci určiť. Určenie obsahu útvaru A tak vlastne spočívalo v určení limity postupnosti plošných obsahov polygónov M_n pre $n \to \infty$.

K tomu, aby sme tieto úvahy Grékov mohli korektne popísať, by bolo treba presne povedať, čo rozumieme pod rovinným útvarom. Kým to neurobíme matematicky

[1] EUDOXOS Z KNIDU (asi 408–355 pred naším letopočtom)



Obr. 1.1: Výpočet obsahu kruhu pomocou vpísaných s_n-uholníkov ($n = 1$ a 2)

presne v Kapitole 4, uspokojíme sa s tým, že rovinný útvar je čosi, čo by (pri eventuálnom zväčšení) mohol egyptský poľnohospodár považovať za obrobiteľné pole. Celý popis má okrem iných ešte jeden háčik: pojem limity bol pre Grékov neznámy. Išlo o akciu, ktorá mala zreteľne niečo spoločné s nekonečnom a takému niečomu sa v starom Grécku snažili vyhnúť zo všetkých síl (mohli by sme to nazvať „horor z nekonečna“). Podstatou ich postupu bolo vlastne to, že plošný obsah „rozdielu“ útvaru A a vpísaného polygónu M_n sa dá urobiť ľubovoľne malým, keď sa zvolí dostatočne veľké n, t.j. keď sa do A vpíše dostatočne bohatý polygón. Týmto spôsobom Gréci obišli „styk s nekonečnom“ a sformulovali vlastne podstatu aproximácie veľkosti plošného obsahu útvaru A. Príslušný postup presne popísal EUKLIDES[2].

Demonštrujme si túto myšlienku exhaustácie na jednoduchom prípade kruhu, viď Obr. 1.1 a Obr. 1.2. S našimi súčasnými vedomosťami vieme elegantne skonštruovať postupnosť $s_n = 3 \times 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, vpísaných polygónov (s_n udáva počet strán n-tého vpísaného polygónu), ktorých obsah je

$$a_n = \frac{1}{2} s_n \sin \frac{2\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

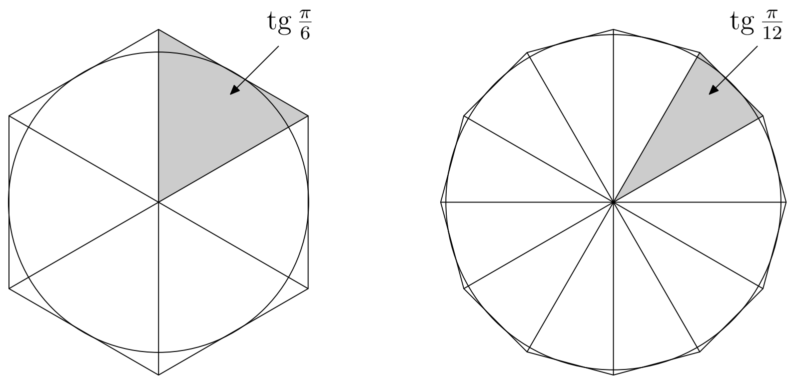
Keďže $(a_n)_1^\infty$ je rastúca a zhora ohraničená postupnosť (dokážte!), podľa vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti pre kruh s polomerom 1 dostávame $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Podobne môžeme postupovať opisovaním polygónov (viď Obr. 1.2), čím dostávame klesajúcu postupnosť ich obsahov

$$b_n = s_n \operatorname{tg} \frac{\pi}{s_n}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

ktorá je ohraničená zdola (dokážte!), a teda opäť konvergentná.

Metódu exhaustácie podstatne rozvinul a aplikoval ARCHIMEDES[3], ktorý ju (okrem iných) použil na určenie hodnoty čísla π. V tej dobe boli už poznatky o krivkách na vysokej úrovni. Pomocou Eudoxovej metódy určil Archimedes napríklad plošný obsah rovinného útvaru ohraničeného parabolou a priamkou. Geometria bola vtedy

[2]EUKLIDES (asi 365–300 pred naším letopočtom)
[3]ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287–212 pred naším letopočtom)



Obr. 1.2: Výpočet obsahu kruhu pomocou opísaných s_n-uholníkov ($n = 1$ a 2)

všetkým – i číselné vyjadrenie obsahu rovinného útvaru bolo chápané geometricky. Na Archimedovom náhrobku bola vytesaná guľa, ktorej bol opísaný valec, ktorého výška sa rovnala priemeru gule. Bolo to symbolické vyjadrenie Archimedovho poznatku o vzájomnom pomere objemu gule a valca a o vzájomnom pomere obsahu povrchu týchto dvoch telies. Traduje sa, že Archimedov náhrobok bol objavený v čase, keď bol rímsky rečník Cicero kvestorom na Sicílii. Cicero nechal náhrobok s týmito geometrickými symbolmi obnoviť, čo bol snáď najväčší príspevok Rimanov k matematike, o ktorú inak neprejavovali záujem (však sa im to aj vymstilo – kiežby to bolo poučením pre dnešných duchaplných postmodernistov!). Rím predurčil v matematike dlhodobé temno, do ktorého trochu svetla vniesla až renesancia a nastupujúci novovek v 16. storočí. V tej dobe sa objavili techniky infinitezimálneho počtu (Kepler[4] a Cavalieri[5]), ktoré mali svoj základ v štúdiu práce starých Grékov a postupne vnášali svetlo do matematických úvah súvisiacich s určovaním veľkosti rôznych útvarov. Infinitezimálne techniky tej doby sú prvými krokmi v smere výstavby dnešnej teórie a techník integrovania.

17. a 18. storočie

17. storočie bolo obdobím, kedy na uchovaných troskách a odhaľovaní chytrosti starých Grékov definitívne začala rásť nová matematika. Svetu ju dali dve výrazné postavy dejín vedy: Newton[6] a Leibniz[7]. Bolo to storočie, v ktorom matematiku formovali takí ľudia ako Galileo[8], Descartes[9], Pascal[10], či Kepler. Newton rozpoznal, že problém určenia veľkosti plochy (integrovania) súvisí s problémom určenia dotyčnice ku krivke, alebo povedané dnešnými slovami, že integrovanie je opačná operácia k derivovaniu (častokrát aj nie celkom správne označovaná ako inverzná operácia). Leibniz sa prestal báť nekonečna, bez predsudkov sčítal nekonečne veľa ne-

[4] Johannes Kepler (1571–1630)
[5] Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647), , čítaj „Kavalieri“
[6] Isaac Newton (1643–1727), čítaj „Njútn“
[7] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), čítaj „Lajbnyc“
[8] Galileo Galilei (1564–1642)
[9] René Descartes (1596–1650), čítaj „Dekárt“
[10] Blaise Pascal (1623–1662), čítaj „Paskal“

konečne malých veličín a vytvoril matematickú symboliku, ktorú používame dodnes. Spoločne tak Newton a Leibniz vytvorili aparát modernej matematickej analýzy. Ten bol vo svojej zárodočnej podobe dlho základom matematického uvažovania a búrlivo sa rozvíjal v 18. storočí. Leibniz s Newtonom prepojili navzájom integrovanie a derivovanie. Oproti historickému vývoju sa prvotnými stali diferenciálne metódy, môže za to hlavne záujem o fyziku a objav toho, že dotyčnica (derivácia) súvisí s okamžitou rýchlosťou. Integrál funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ sa počítal na základe fundamentálneho vzťahu matematickej analýzy (tiež označovaný ako Newtonova-Leibnizova formula)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia k f na $\langle a, b\rangle$.

Vytvárané matematické metódy boli priamo zviazané s potrebami fyziky, postupne sa objavoval pojem funkcie, vyvíjal sa názor na to, čo vlastne funkcia je a vládlo všeobecné presvedčenie, že skôr či neskôr bude doriešené všetko, čo s matematickou analýzou súvisí. Prejavovalo sa to konkrétne napríklad v presvedčení, že každú funkciu je možné derivovať a tiež integrovať použitím Newtonovej-Leibnizovej formuly. Ak sa nám dnes takéto presvedčenie zdá byť prehnané, je to asi tým, že máme inú predstavu o tom, čo je funkcia. Newtonovo presvedčenie malo zdravý základ v tom, že jeho funkcie boli v podstate polynómy.

18. storočie sa nieslo v znamení veľkej ofenzívy matematickej analýzy do oblastí, ktoré by sme dnes označili ako aplikácie matematiky. Vtedy ale nebolo možné odlíšiť matematika od fyzika. Predstaviteľom takejto „integrálnej“ vedy je EULER[11]. Reprezentuje obdobie konsolidácie a použitia veľkých objavov Newtona a Leibniza zo 17. storočia. Eulerov súčasník D'ALEMBERT[12] bol zástancom hesla „postupujme vpred, presvedčenie sa dostaví neskôr“. S plynúcim časom však používanie matematických metód vo fyzike stále viac narušovalo ideálne predstavy o matematických objektoch, ktoré je dôležité študovať. Z hľadiska nášho záujmu sa to týkalo hlavne toho, čo je vlastne funkcia. Predstava, ktorá sa medzitým vžila (totiž že funkcia musí byť daná tým istým analytickým výrazom všade tam, kde sa vyšetruje) bola z hľadiska použitia vo fyzike nerealistická. V poslednom desaťročí vedecky mimoriadne plodného 18. storočia FOURIER[13] narušil vžité predstavy o tom, že funkcie musia byť spojité. V historických pojednaniach sa dosť špekuluje o tom, ako jednotliví matematici na prelome 18. a 19. storočia chápali pojem funkcie. Niektoré Fourierove vyjadrenia k tejto téme (napr. v jeho diele „Théorie analytique de la chaleur“) môžu byť dnešnému matematikovi z istého hľadiska blízke, pretože si ich môžeme vyložiť ako určenie funkcie pomocou predpisu, ktorým je bodu x v definičnom obore priradená jediná funkčná hodnota $f(x)$. Aj keď je pojem funkcie takto zavedený dosť všeobecne, zdá sa hlavne podľa toho, ako sa s funkciami narábalo, že funkcie používané v tej dobe boli prinajhoršom po častiach hladké s nanajvýš konečným počtom bodov nespojitosti v každom konečnom intervale. Pojem spojitosti bol rovnako skôr intuitívny – súvisel (povedané v dnešnej terminológii) s predstavou súvislosti grafu funkcie.

[11] LEONHARD EULER (1707–1783), čítaj „Ojler“

[12] JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783), čítaj „Dalambért“

[13] JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830), čítaj „Furier“

19. a 20. storočie

Do 19. storočia vstúpila matematická analýza dosť neisto pokiaľ ide o predstavu o objektoch, ktoré skúmala. Bola zjavná potreba presnejšie vymedziť pojmy, s ktorými sa pracuje. Napríklad presná formulácia pojmu spojitosti funkcie pochádza od Bolzana[14]. Upresňované boli aj ďalšie pojmy: Cauchy[15] zopakoval Bolzanovu definíciu spojitosti funkcie v roku 1821, ale nie je celkom isté, či vzhľadom k Bolzanovej izolácii v Prahe jeho prácu poznal. Cauchy sa venoval aj upresneniu pojmu integrál. V 18. storočí bol integrál jednoducho považovaný za opačnú operáciu k derivovaniu a funkcie sa integrovali pomocou Newtonovej-Leibnizovej formuly. Na Eudoxovu exhaustívnu metódu sa akoby zabudlo, bola však občas použitá pri aproximácii veľkosti plochy pod krivkou v karteziánskom systéme v rovine, keď k danej funkcii nebolo vhodné alebo možné určiť primitívnu funkciu. V roku 1823 Cauchy sformuloval novú definíciu integrálu a zaoberal sa jeho existenciou pre pomerne širokú triedu funkcií. Tento jeho prístup (integrál ako limita integrálnych súčtov prislúchajúcich funkcii, deleniu intervalu a výberu reprezentantov) bude vysvetlený v Oddieli 3.2.

Cauchyho definícia integrálu mala pochopiteľne dobové chyby. Je potrebné povedať, že v tej dobe nebolo nič známe o úplnosti reálnych čísel, a tak vlastne bolo i nekorektné posudzovať, či pri limitnom prechode cez zjemňujúce sa delenia integrálne súčty skutočne k nejakému reálnemu číslu konvergujú. Na začiatku 19. storočia totiž ešte nebola zrelá doba na to, aby boli reálne čísla chápané v dnešnom zmysle (ich úplnosť bola pokladaná z geometrických dôvodov za samozrejmosť). Až v roku 1872 boli publikované prvé práce, ktoré sa týkali konštrukcie reálnych čísel. Cauchymu však nemožno odoprieť nemalý príspevok k započatému procesu aritmetizácie analýzy.

Ďalší veľký prínos k vybudovaniu pojmu integrál patrí Riemannovi[16], avšak taktiež sa nebudeme o ňom podrobnejšie zmieňovať na tomto mieste, nakoľko je jeho teórii integrálu venovaná značná časť nasledujúceho textu.

Na záver ešte spomeňme, že Riemannov integrál bol v 20. storočí rôznymi spôsobmi zovšeobecnený a modifikovaný. Snáď najdôležitejšie zovšeobecnenie vybudoval v roku 1902 Lebesgue[17]. Lebesgueov integrál a Lebesgueova miera, ktorú definoval v roku 1904, urobili mnohé problémy integrálneho počtu priezračnejšími. Ich podrobnejší popis však presahuje možnosti tohto textu. Iba spomeňme, že pomocou Lebesgueovej miery je možné elegantne popísať celú triedu Riemannovsky integrovateľných funkcií, viď Poznámku 3.51. Na záver dodajme, že ani Lebesgueovým integrálom sa príbeh integrálu nekončí, pozri koniec Kapitoly 3.

Záujemcov o hlbšie štúdium prierezu históriou integrálu odkazujeme na knihu [11]. Viac sa o histórii analýzy ako celku možno dozvedieť napr. z knihy [5].

---

[14] Bernard Bolzano (1781–1848)

[15] Augustin Luis Cauchy (1795–1857), čítaj „Kóši“

[16] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), čítaj „Ríman“

[17] Henri Léon Lebesgue (1875–1941), čítaj „Lebég“

Kapitola 2

Newtonov integrál

Pri objasňovaní pojmu primitívna funkcia, viď napríklad [7], sme venovali množstvo pozornosti nájdeniu primitívnej funkcie k zadanej funkcii, avšak menej nás zaujímala otázka kedy a k akým funkciám vieme primitívnu funkciu nájsť. Aj tejto otázke sa budeme venovať na nasledujúcich stranách. Zrejme naša snaha vedieť nájsť primitívnu funkciu by mala mať určitý zmysel a využitie. Tieto sa ukážu v súvislosti s tzv. určitým integrálom, k vybudovaniu ktorého budeme sledovať dve cesty: prvá z nich bude kopírovať myšlienky Isaaca Newtona pri vytváraní infinitezimálneho počtu, kde vidieť zrejmý súvis medzi diferenciálom (deriváciou) a integrálom. Druhou cestou budovania integrálu bude tá historicky staršia, kde ukážeme, že ide o všeobecnú metódu, ktorá pokrýva staročné snahy rôznych matematikov o určenie obsahu, objemu, povrchu a ďalších kvantitatívnych ukazovateľov geometrických útvarov (ale nielen ich). Ukážeme tiež, že obe cesty sa stretajú a poskytujú veľmi silný nástroj pre popisovanie javov okolo nás.

Nech teda f je nezáporná spojitá funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. Pre každé $t \in \langle a, b\rangle$ označme $P(t)$ obsah útvaru $\{[x, y];\ a \le x \le t,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Pre malé $h > 0$ máme, že $P(t+h)-P(t)$ je obsah útvaru $\{[x, y];\ t \le x \le t+h,\ 0 \le y \le f(x)\}$ (môžeme písať $t \le x$ namiesto $t < x$, pretože obsah úsečky je nulový). Zo spojitosti funkcie f sa hodnoty $f(x)$ a $f(t)$ pre $t \le x \le t+h$ málo líšia, presnejšie ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $t \le x \le t+\delta$ je $|f(x) - f(t)| \le \varepsilon$. Preto pre $0 < h < \delta$ platí

$$h(f(t) - \varepsilon) \le P(t + h) - P(t) \le h(f(t) + \varepsilon),$$

z čoho po úprave máme

$$\left|\frac{P(t + h) - P(t)}{h} - f(t)\right| \le \varepsilon.$$

Z uvedeného vyplýva, že pre $a \le t < b$ platí

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P(t + h) - P(t)}{h} = f(t).$$

Analogicky sa odvodí limita zľava pre $a < t \le b$. Vo vnútorných bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ teda platí $P'(t) = f(t)$, t.j. P je primitívna funkcia k f. Zrejme P je tá funkcia z neurčitého integrálu $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, pre ktorú platí $P(a) = 0$. Takto sme vcelku jednoducho objavili metódu na určenie obsahu $P(t)$. Vzhľadom na uvedenú ilustratívnu úvahu zavedieme nasledujúci pojem.

Definícia 2.1. Nech $I \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľný interval, $\langle a, b\rangle \subset I$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Číslo $F(b) - F(a)$ nazývame *Newtonov určitý integrál* (skrátene $\mathscr{N}$-integrál)[1] funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme ho $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak existuje $\mathscr{N}$-integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$, hovoríme, že funkcia f je *Newtonovsky integrovateľná* (skrátene $\mathscr{N}$-integrovateľná) na intervale $\langle a, b\rangle$. Množinu všetkých $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$ označujeme symbolom $\mathscr{N}\langle a, b\rangle$.

Poznámka 2.2. Rozdiel $F(b) - F(a)$ sa zvykne často zapisovať skrátene v tvare $[F(x)]_a^b$, teda

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

V súvislosti s existenciou primitívnej funkcie na intervale ľubovoľného typu poznamenajme, že $\mathscr{N}$-integrál je možné zaviesť aj na inom type intervalu ako je uzavretý. Ak funkcia F je primitívnou funkciou k f na (a, b) a nie je definovaná v krajných bodoch, potom ju treba dodefinovať limitou (nie je ťažké ukázať, že spojitá funkcia na (a, b) má v krajných bodoch vlastné jednostranné limity práve vtedy, keď je rovnomerne spojitá na (a, b)) a $\mathscr{N}$-integrál z funkcie f na (a, b), kde $-\infty \le a < b \le +\infty$, môžeme zaviesť ako

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x),$$

ak rozdiel na pravej strane má zmysel.

Prirodzene vyvstáva otázka korektnosti definície $\mathscr{N}$-integrálu, pretože vieme, že ak F je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I, potom aj $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale I. Našťastie,

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = G(b) - G(a),$$

čiže *$\mathscr{N}$-integrál nezávisí na výbere primitívnej funkcie.*

Príklad 2.3. Vypočítajte $\mathscr{N}$-integrály nasledujúcich funkcií na zadaných intervaloch:

1.) $f(x) = x^3 + 2x - 3$, kde $\langle a, b\rangle = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Keďže $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 3x$ je primitívnou funkciou k f na $\mathbb{R}$, potom

$$(\mathscr{N})\int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 + 2x - 3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - 3x\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{79}{64}.$$

2.) $g(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, kde $\langle a, b\rangle = \langle 0, \pi\rangle$. S nájdením primitívnej funkcie to teraz nebude také jednoduché ako v predchádzajúcom príklade. Skúsme pre $x \neq 0$ derivovať funkciu $G(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$, t.j. pre každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

[1] tento integrál je pomenovaný práve na počesť Isaaca Newtona, ktorý vzťah medzi diferenciálnym a integrálnym počtom postrehol medzi prvými; samotný pojem „integrál“ pochádza od Jacoba Bernoulliho (1654–1705), čítaj „Bernuli“

$G'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2}$, čo znamená, že G je primitívnou funkciou k g na množine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ostáva nám vyšetriť správanie sa funkcie G v bode $x_0 = 0$. Zo spojitosti máme $G(0) = \lim\limits_{x\to 0} G(x) = 0$, a teda

$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{\pi}{x^2} = 0,$$

preto hľadaná primitívna funkcia má tvar $G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Potom $(\mathscr{N}) \int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = G(\pi) - G(0) = \pi^2 \sin \frac{1}{\pi}$.

3.) $h(x) = \operatorname{sgn} x$, kde $\langle a, b\rangle = \langle -1, 1\rangle$. Keby funkcia sgn mala primitívnu funkciu H na intervale $\langle -1, 1\rangle$, potom by H' nemohla mať bod nespojitosti prvého druhu, čo však funkcia sgn má v bode $x_0 = 0$, a teda neexistuje primitívna funkcia, z čoho vyplýva, že nedokážeme vypočítať $(\mathscr{N}) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $\mathscr{N}$-integrál neexistuje.

Ako sme už uviedli, $\mathscr{N}$-integrál úzko súvisí s primitívnou funkciou, a teda s neurčitým integrálom. Pýtame sa preto, či nemôžeme využiť metódy, ktoré sme nadobudli pri štúdiu neurčitých integrálov na výpočet $\mathscr{N}$-integrálu. Kladnú odpoveď poskytneme v nasledujúcich tvrdeniach.

Veta 2.4 (základné vlastnosti $\mathscr{N}$-integrálu). *Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c \in I$ a f, g majú primitívne funkcie na I. Potom*

(i) $(\mathscr{N}) \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{N}) \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) ak $\alpha \in \mathbb{R}$, *tak* $(\mathscr{N}) \int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b - a)$;

(iii) ak $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *tak*

$$(\mathscr{N}) \int_a^b (\alpha_1 f(x) \pm \alpha_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha_1 (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \alpha_2 (\mathscr{N}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

(iv) $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz. Nech F je primitívnou funkciou k funkcii f a G je primitívnou funkciou k funkcii g na intervale I. Potom

(i) $(\mathscr{N}) \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$ a $(\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -(\mathscr{N}) \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) Keďže $H(x) = \alpha x$ je primitívnou funkciou k $h(x) = \alpha$ na $\mathbb{R}$, potom $(\mathscr{N}) \int_a^b \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha b - \alpha a = \alpha(b - a)$.

(iii) Zrejme $\alpha_1 F \pm \alpha_2 G$ je primitívna funkcia k $\alpha_1 f \pm \alpha_2 g$ na I, teda

$$\begin{aligned}(\mathscr{N}) \int_a^b (\alpha_1 f(x) \pm \alpha_2 g(x))\,\mathrm{d}x &= \alpha_1 F(b) \pm \alpha_2 G(b) \mp \alpha_1 F(a) \mp \alpha_2 G(a) \\ &= \alpha_1 (F(b) - F(a)) \pm \alpha_2 (G(b) - G(a)) \\ &= \alpha_1 (\mathscr{N}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \alpha_2 (\mathscr{N}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(iv) $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = F(b)-F(c)+F(c)-F(a) = (\mathscr{N})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Poznámka 2.5. Posledne dve uvedené tvrdenia možno matematickou indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet (urobte to!), t.j.

(iii') ak $\alpha_i \in \mathbb{R}$ a f_i majú primitívnu funkciu na I, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, tak

$$(\mathscr{N})\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot (\mathscr{N})\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x;$$

(iv') ak $a_j \in I$, $j = 1, 2, \ldots, n$ a f má primitívnu funkciu na I, tak

$$(\mathscr{N})\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathscr{N})\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 2.6. *Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$ a f, g majú primitívne funkcie na I. Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, potom $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{N})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dôkaz. Nech F je primitívnou funkciou k funkcii f a G je primitívnou funkciou k funkcii g na intervale I, t.j. pre každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = g(x)$. Potom pre každé $x \in I$ je $(F-G)'(x) = (f-g)(x) \geq 0$, čo znamená, že funkcia $F-G$ je neklesajúca na I, a preto $(\mathscr{N})\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x = (F-G)(b) - (F-G)(a) \geq 0$. Podľa Vety 2.4 (iii) máme výsledok. □

Dôsledok 2.7. Nech $I \subset \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in I$ také, že $a \leq b \leq c \leq d$. Ak f má primitívnu funkciu na I a pre každé $x \in \langle a, d\rangle$ je $f(x) \geq 0$, potom $(\mathscr{N})\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ a $(\mathscr{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{N})\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz. Prvá časť plynie z Vety 2.6 pre $g(x) \equiv 0$ na I. Druhá časť je dôsledkom Vety 2.4 (iv), t.j.

$$\begin{aligned}(\mathscr{N})\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x &= (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{N})\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq (\mathscr{N})\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Poznáme už niekoľko základných vlastností $\mathscr{N}$-integrálu, ale častokrát je dôležitejšie vedieť ho vypočítať. K nájdeniu primitívnej funkcie sme využívali dve metódy redukcie neurčitého integrálu na jednoduchší. Z úzkeho súvisu medzi $\mathscr{N}$-integrálom a neurčitým integrálom veľmi jednoducho dostávame nasledujúce metódy.

Veta 2.8 (substitučná metóda pre $\mathscr{N}$-integrál). *Nech φ je diferencovateľná na I a $\varphi(x) \in J \subset \mathbb{R}$ pre každé $x \in I$. Ak f má primitívnu funkciu na J a $a, b \in I$, potom*

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz. Podľa vety o substitúcii pre neurčité integrály, za podmienok vety je $F\circ\varphi$ primitívnou funkciou k $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ na I, kde F je primitívnou funkciou k funkcii f na J. Potom teda

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (\mathscr{N})\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

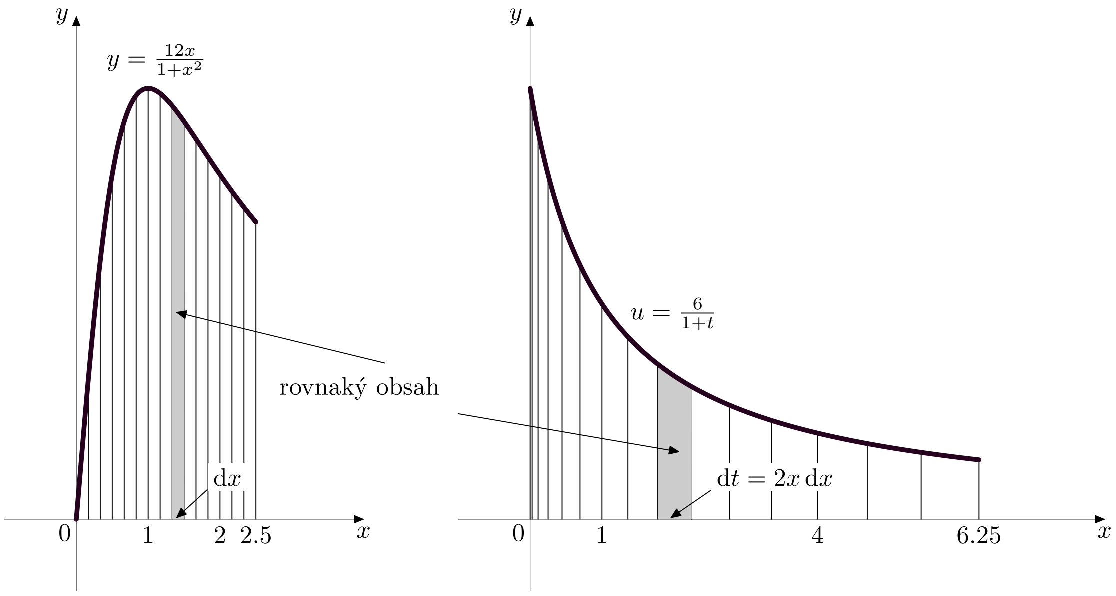
Príklad 2.9. Vypočítajte $(\mathscr{N})\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{12x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Položme $\varphi(x)=x^2$ a $f(t)=\frac{6}{1+t}$. Potom

$$(\mathscr{N})\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{12x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{6\cdot 2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=x^2 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{5}{2} \Rightarrow t=\frac{25}{4} \end{array} \right| = (\mathscr{N})\int_0^{\frac{25}{4}} \frac{6}{1+t}\,\mathrm{d}t,$$

pretože φ je diferencovateľná na $\mathbb{R}$ (s $\varphi'(x)=2x$), teda aj na intervale $\langle 0,\frac{5}{2}\rangle$ a $\varphi(x)\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pre $x\in\langle 0,\frac{5}{2}\rangle$. Keďže f má na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ primitívnu funkciu $F(t)=6\ln|1+t|$, posledný $\mathscr{N}$-integrál je potom

$$(\mathscr{N})\int_0^{\frac{25}{4}} \frac{6}{1+t}\,\mathrm{d}t = 6\left[\ln(1+t)\right]_0^{\frac{25}{4}} = 6\ln\frac{29}{4}.$$

Grafický význam substitučnej metódy je na obrázku, ktorý ilustruje použitú substi-



túciu $t=x^2$ a funkcie $\frac{12x}{1+x^2}$ a $\frac{6}{1+t}$. Body x a $x+\Delta x$ sa pri tejto substitúcii zobrazujú do bodov $t=x^2$ a $t+\Delta t = x^2+2x\Delta x+\Delta x^2$. Preto pre $\Delta x\to 0$ majú zvýraznené „obdĺžniky“ rovnaké obsahy, a teda oba $\mathscr{N}$-integrály rovnakú hodnotu.

Veta 2.10 (metóda per partes pre $\mathscr{N}$-integrál). *Nech u,v sú diferencovateľné na $I\subset\mathbb{R}$ a $u'v$ má primitívnu funkciu na I. Ak $a,b\in I$, potom*

$$(\mathscr{N})\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathscr{N})\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Za predpokladov vety podľa per partes pre neurčité integrály má funkcia uv' primitívnu funkciu $\psi = uv - \phi$ na I, kde ϕ je primitívnou funkciou k funkcii $u'v$ na I. Potom

$$\begin{aligned}(\mathscr{N}) \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \psi(b) - \psi(a) = u(b)v(b) - \phi(b) - u(a)v(a) + \phi(a) \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - (\phi(b) - \phi(a)) \\ &= [u(x)v(x)]_a^b - (\mathscr{N}) \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Príklad 2.11. Vypočítajte $(\mathscr{N}) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x$. Položme $v'(x) = 1$ a $u(x) = \operatorname{arccotg} x$. Potom $v(x) = x$ a $u'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, teda sú splnené predpoklady Vety 2.10, čiže

$$(\mathscr{N}) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x = [x \operatorname{arccotg} x]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\,(\mathscr{N}) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Posledný $\mathscr{N}$-integrál vypočítame pomocou substitúcie $1+x^2 = t$ (viď Veta 2.8), teda

$$(\mathscr{N}) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_1^4 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^4$$

a celkový výsledok je

$$(\mathscr{N}) \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x = [x \operatorname{arccotg} x]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\,[\ln t]_1^4 = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2.$$

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nájdite všetky $\alpha \in \mathbb{R}$, pre ktoré existuje $(\mathscr{N}) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, ak

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\alpha}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

◇ Vypočítajte $(\mathscr{N}) \int_{-2}^{2} \max\{1, x^4\}\,\mathrm{d}x$.

◇ Zistite, či funkcia g je $\mathscr{N}$-integrovateľná na intervale $\langle -1, 1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle -2, -1\rangle$, ak $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

★ Niekoľko poznámok k Newtonovmu integrálu

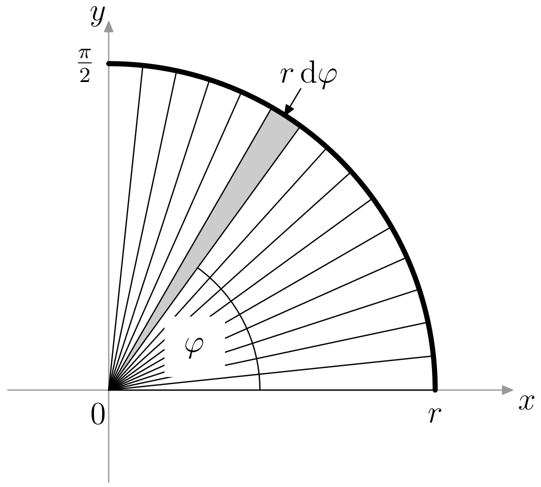
(i) Výhodou $\mathscr{N}$-integrálu je jeho zrejmý súvis s diferenciálnym počtom, nakoľko pre funkcie, ku ktorým existuje primitívna funkcia, je tento integrál definovaný. Zatiaľ sme ale neriešili otázku, ktoré funkcie sú $\mathscr{N}$-integrovateľné, resp. aká „veľká“

je množina $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií (spomenuli sme len, že po vybudovaní potrebného aparátu ukážeme, že každá spojitá funkcia má primitívnu funkciu, viď Veta 3.76, a teda je $\mathscr{N}$-integrovateľná). Ďalšou komplikáciou je fakt, že tento teoretický výsledok neumožňuje vypočítať napríklad $\mathscr{N}$-integrály $(\mathscr{N})\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ alebo $(\mathscr{N})\int_2^5 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, pretože hľadané primitívne funkcie síce existujú, ale nie sú elementárne.

(ii) Komplikovanejšou otázkou je otázka existencie primitívnej funkcie k nespojitej funkcii. V tomto prípade odpoveď jednoznačná nie je, pretože ako sme uviedli, funkcia sgn nemá primitívnu funkciu na ľubovoľnom intervale $\langle a, b\rangle$ obsahujúcom bod $x_0 = 0$, ale funkcia g v Príklade 2.3 primitívnu funkciu mala. Teda vlastnosť mať primitívnu funkciu je častokrát obmedzujúca pri výpočte „plochy pod grafom funkcie“. V literatúre, viď napr. [3], sa môžeme stretnúť s možným zoslabením tejto podmienky napr. uvažovaním *zovšeobecnenej primitívnej funkcie* k funkcii f na I, t.j. ak pre každé $x \in I \setminus M$ platí $F'(x) = f(x)$, kde $M \subset I$ je konečná množina a F je spojitá funkcia na I. V takomto prípade funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$ má zovšeobecnenú primitívnu funkciu $F(x) = |x|$ na ľubovoľnom intervale $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathscr{N}$-integrál by sme definovali analogicky. Pre výpočtovú stránku však nemá toto relatívne jednoduché zovšeobecnenie veľký zmysel. Poznamenajme, že je možné pracovať aj so spočítateľnou výnimočnou množinou M. Dá sa zostrojiť dokonca rastúca funkcia, ktorá nemá zovšeobecnenú primitívnu funkciu (robí sa to pomocou nekonečných radov). Samozrejme, každá spojitá funkcia má zovšeobecnenú primitívnu funkciu (opäť sa odkazujeme na Vetu 3.76 o existencii primitívnej funkcie k spojitej funkcii).

(iii) Ďalším výrazným súvisom medzi diferenciálnym počtom a $\mathscr{N}$-integrálom je fakt, ktorý sme použili bez zdôvodňovania a hlbšieho komentára, a teda označenie $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (samotný symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pochádza až z roku 1822 od Fouriera). Symbol $\mathrm{d}x$ sme už použili v diferenciálnom počte na označenie diferenciálu a pochádza od Leibniza. Ako túto skutočnosť interpretovať? Ilustrujme si to na nasledujúcej jednoduchej úvahe.

Leibniz pravdepodobne ako prvý použil symbol $\int$, ktorý preňho znamenal súčet nekonečne malých útvarov (t.j. sumu, odtiaľ aj tento symbol ako pretiahnuté písmeno S), čo reflektuje idey výpočtov obsahov a objemov od Archimeda. Našou úlohou je určiť obsah kruhu s polomerom r. Rozdeľme tento kruh na nekonečne tenké „trojuholníky“. Dĺžka kružnice prislúchajúcej nekonečne malej zmene uhla $\mathrm{d}\varphi$ je $r\,\mathrm{d}\varphi$, a preto plocha takéhoto elementárneho „trojuholníka“ je $\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi$. Obsah kruhu s polomerom r teda dostaneme sčítaním obsahov týchto elementárnych „trojuholníkov“ cez celý kruh, teda



$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}r^2[\varphi]_0^{2\pi} = \pi r^2,$$

kde uvedený integrál nie je nič iné ako $\mathscr{N}$-integrál (využili sme to pri dosadení hornej a dolnej hranice do primitívnej funkcie). Takýto postup aj dnes vhodne využívajú fyzici pri riešení rôznych úloh.

Z uvedenej úvahy vyplýva zaujímavý fakt: *Ludolfovo číslo* π *môžeme definovať ako hodnotu integrálu*, t.j.

$$\pi = 4\,(\mathscr{N})\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Táto definícia však nie je veľmi vhodná, ak sa chceme o tomto čísle dozvedieť viac (napr. iracionálnosť, transcendentnosť a pod.).

Ak sa teda vrátime k počiatkom diferenciálneho a integrálneho počtu, samotný Newton a Leibniz si uvedomili, že uvedená metóda môže poslúžiť ako všeobecná k vyšetrovaniu obsahu, objemu a pod., teda otázkam, ktoré trápili matematikov rôznych kultúr a dôb. Avšak zatiaľ nestačí, pretože sme videli, že pomocou $\mathscr{N}$-integrálu nedokážeme vypočítať obsah takého jednoduchého útvaru, aký je ohraničený grafom funkcie sgn na intervale $\langle -1, 1\rangle$. Preto je potrebné zlepšiť túto konštrukciu, aby sme to dokázali. A to je práve cieľom nasledujúcej kapitoly, v ktorej sa budeme zaoberať konštrukciou integrálu, ktorá sa zdá byť nezávislá na diferenciálnom počte a umožní nám integrovať aj takéto a omnoho „horšie“ funkcie.

Kapitola 3

Riemannov integrál

Ako sme už prezradili na konci predchádzajúcej časti, budeme sa venovať konštrukcii určitého integrálu, ktorá je historicky omnoho staršia ako Newtonova, ale až v 19. storočí sa dostáva znova k slovu pri zavedení pojmu integrál v prácach RIEMANNA a neskôr v názornej geometrickej interpretácii v prácach DARBOUXA[1] a DU-BOIS REYMONDA[2].

Ako sme mohli vidieť v motivačnom príklade na úvod predchádzajúcej kapitoly, súvis medzi diferenciálnym a integrálnym počtom by mohol poslúžiť na účel určenia obsahu plochy pod grafom funkcie. Nevenovali sme tomu ďalej veľkú pozornosť, čo teraz napravíme a ukážeme, že tieto myšlienky vyústili do všeobecnej metódy, pomocou ktorej je možné vypočítať nielen obsahy rovinných útvarov, ale aj objemy a povrchy telies a ešte oveľa viac.

Myšlienka výpočtu obsahu kruhu pomocou vpisovania a opisovania polygónov, viď Kapitolu 1, sa dá zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom. Nech f je kladná ohraničená funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. Zaujíma nás obsah plochy P pod grafom funkcie f ohraničený priamkami $x = a$, $x = b$ a $y = 0$, viď Obr. 3.1. Sledujúc postup uvedený pri obsahu kruhu rozdeľme interval $\langle a, b\rangle$ na n častí bodmi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Je ľahko vidieť, že plošný obsah celého útvaru je rovný súčtu obsahov týchto n čiastkových útvarov. Podobne ako v prípade kruhu robíme horný a dolný odhad tejto plochy. Nech $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je i-ty čiastočný interval, $i = 1, 2, \ldots, n$, s plochou P_i a dĺžkou Δx_i. Keďže f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, tak je ohraničená na každom čiastočnom intervale I_i, a preto existujú čísla

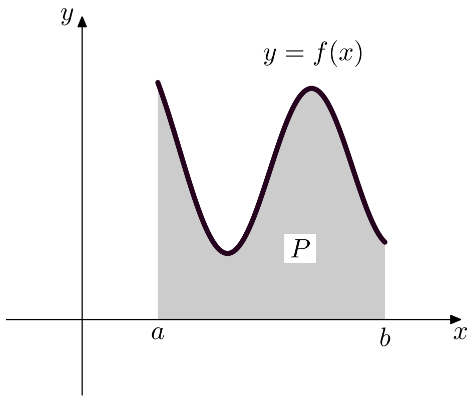
$$m_i = \inf_{x\in I_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in I_i} f(x).$$

Potom $m_i\Delta x_i$ je plocha i-teho vpísaného obdĺžnika a $M_i\Delta x_i$ je plocha i-teho opísaného obdĺžnika, teda $m_i\Delta x_i \le P_i \le M_i\Delta x_i$. Sčítaním týchto obdĺžnikov dostávame odhad

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le P \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

[1] JEAN-GASTON DARBOUX (1842–1917), čítaj „Darbú“

[2] PAUL DAVID GUSTAV DU BOIS-REYMOND (1831–1889), čítaj „Duboá Rejmond“, mladší brat Emila (1818–1896), zakladateľa experimentálnej elektrofyziológie



Obr. 3.1: Obsah plochy P pod grafom funkcie

kde tieto „dolné“ a „horné“ súčty sú prirodzenými odhadmi plochy P. Teraz presne sformulujeme jednotlivé kroky tejto konštrukcie. *V nasledujúcom stále uvažujeme funkciu f definovanú a ohraničenú na intervale $\langle a, b\rangle$.*

Definícia 3.1. *Delením intervalu* $\langle a, b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ takých, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Čísla x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, nazývame *deliacimi bodmi delenia* D a intervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ *čiastočnými intervalmi delenia* D. Množinu všetkých delení D intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $\mathscr{D}\langle a, b\rangle$.

Poznámka 3.2. Je dobré si uvedomiť, že pri definícii delenia používame určitú nepísanú dohodu: *delením intervalu $\langle a, b\rangle$ je jeho konečná podmnožina prvkov vrátane usporiadania*, pričom jej extrémy splývajú s krajnými bodmi intervalu.

Pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ označme Δx_i dĺžku i-teho čiastočného intervalu $I_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a položme $m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$. Čísla

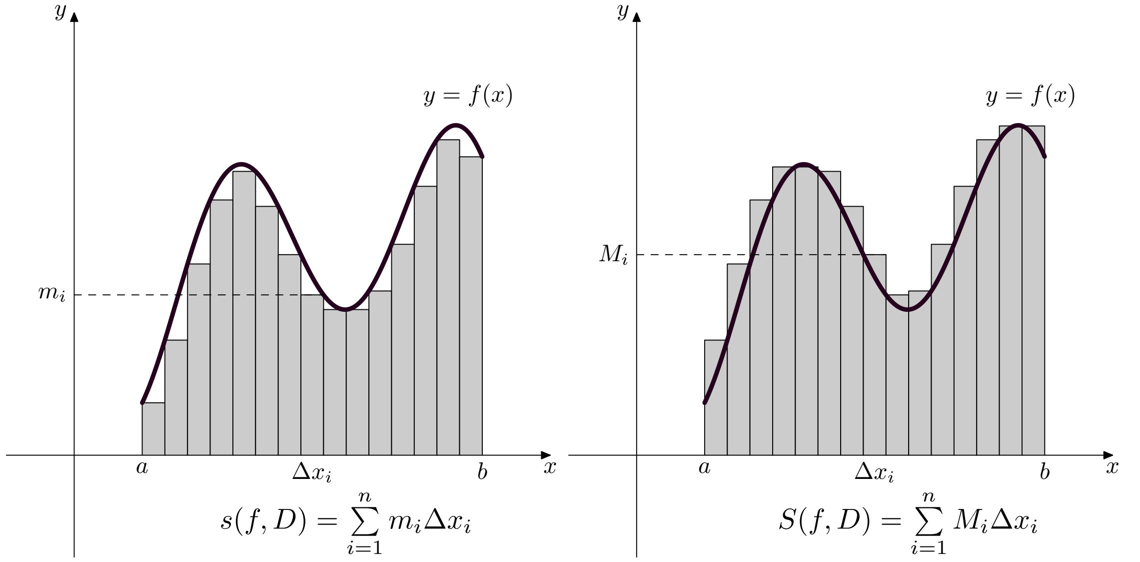
$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{a} \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

viď Obr. 3.2, nazveme *dolný* a *horný Darbouxov súčet* prislúchajúci funkcii f a deleniu D.

Definícia 3.3. Hovoríme, že *delenie D_1 je zjemnením delenia D*, akk $D \subseteq D_1$. *Delenie D je spoločným zjemnením delení D_1* a D_2, akk $D = D_1 \cup D_2$.

Predchádzajúca definícia vlastne hovorí, že delenie D je spoločným zjemnením delení D_1 a D_2, akk každý deliaci bod delenia D_1 a D_2 je deliacim bodom delenia D. Špeciálne, každé delenie je zjemnením seba samého. Zaujímavé je si všimnúť, že zavádzame určité usporiadanie medzi deleniami. Treba si však dať pozor, pretože navzájom môžeme porovnávať len niektoré delenia (neplatí teda dichotómia).

Nasledujúca lema nám objasní správanie sa dolných a horných Darbouxových súčtov pri zjemnení delenia.



Obr. 3.2: Dolné a horné Darbouxove súčty

Lema 3.4. *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom*

(i) $s(f, D) \leq S(f, D)$*;*

(ii) ak $D \subseteq D'$*, tak* $s(f, D) \leq s(f, D')$ *a* $S(f, D) \geq S(f, D')$*;*

(iii) $s(f, D) \leq S(f, D')$*.*

Dôkaz. Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$.

(i) Triviálne, stačí si uvedomiť, že pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $m_i \leq M_i$ a $\Delta x_i > 0$, teda $m_i\Delta x_i \leq M_i\Delta x_i$. Sčítaním cez všetky intervaly dostávame tvrdenie.

(ii) Nech $D' = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$. Keďže D' je zjemnením delenia D, potom čiastočný interval I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, je buď čiastočným intervalom delenia D', alebo sa rozpadne na niekoľko čiastočných intervalov delenia D'. V prvom prípade sú príspevky k $S(f, D')$ rovnaké ako $S(f, D)$, v druhom prípade pre nejaké $j, s \in \{1, \ldots, m\}$ je $x_{i-1} = y_{j-1}$ a $x_i = y_s$, kde $s > j$, a teda

$$M_i\Delta x_i \geq M'_j\Delta y_j + M'_{j+1}\Delta y_{j+1} + \cdots + M'_s\Delta y_s,$$

kde $M'_k = \sup_{x\in J_k} f(x)$ a $J_k = \langle y_{k-1}, y_k\rangle$, $k = 1, \ldots, m$. Potom ale

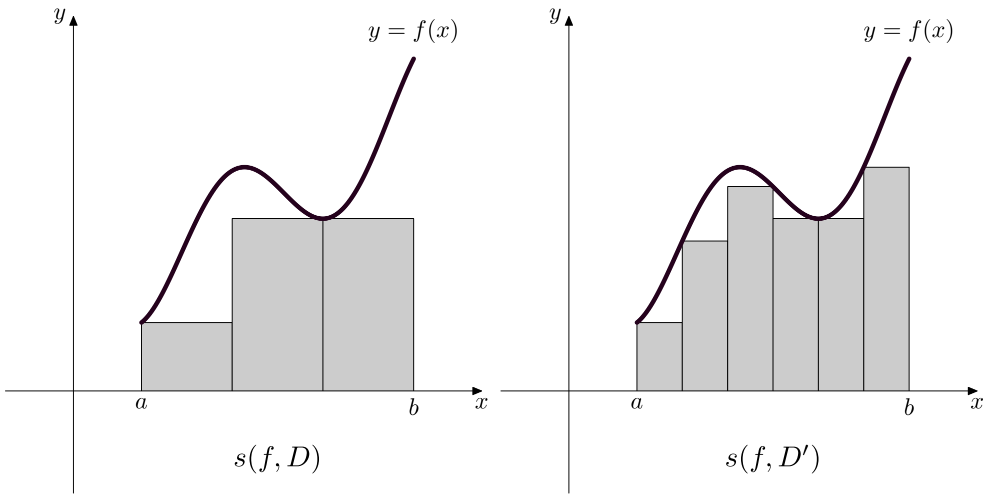
$$S(f, D') = \sum_{j=1}^{m} M'_j\Delta y_j \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = S(f, D).$$

Analogicky pre dolné Darbouxove súčty.

(iii) Nech $D^* = D \cup D'$. Keďže D^* je spoločným zjemnením delení D a D', tak podľa časti (i) a (ii) máme

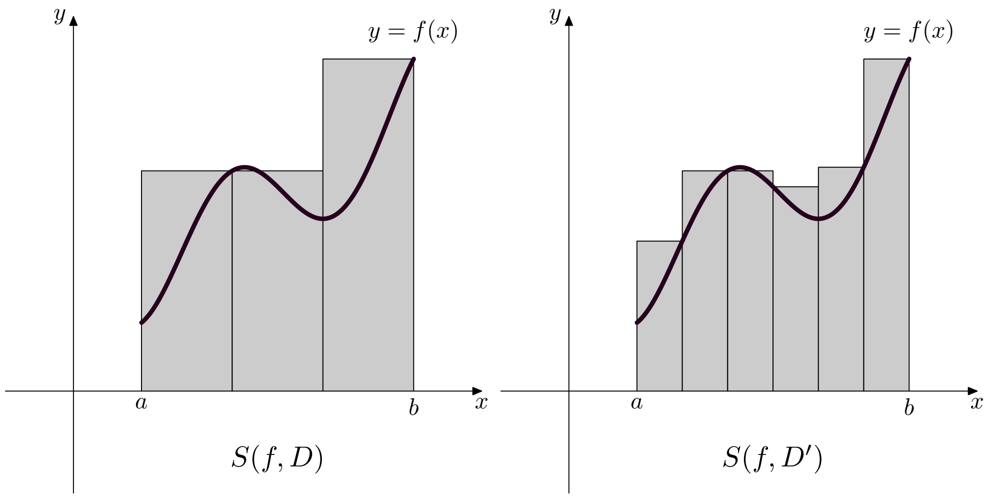
$$s(f, D) \leq s(f, D^*) \leq S(f, D^*) \leq S(f, D'),$$

čo sme chceli dokázať. $\square$



Obr. 3.3: Zjemnenie delenia – dolné Darbouxove súčty

Poznámka 3.5. Lema chce vlastne povedať, že pre ľubovoľné dve delenia sa dolný a horný Darbouxov súčet správajú vždy rovnako (v zmysle usporiadania). Taktiež pridaním deliaceho bodu narastie dolný Darbouxov súčet (alebo sa nezmení), viď Obr. 3.3 a zmenší sa horný Darbouxov súčet (alebo sa nezmení), viď Obr. 3.4.

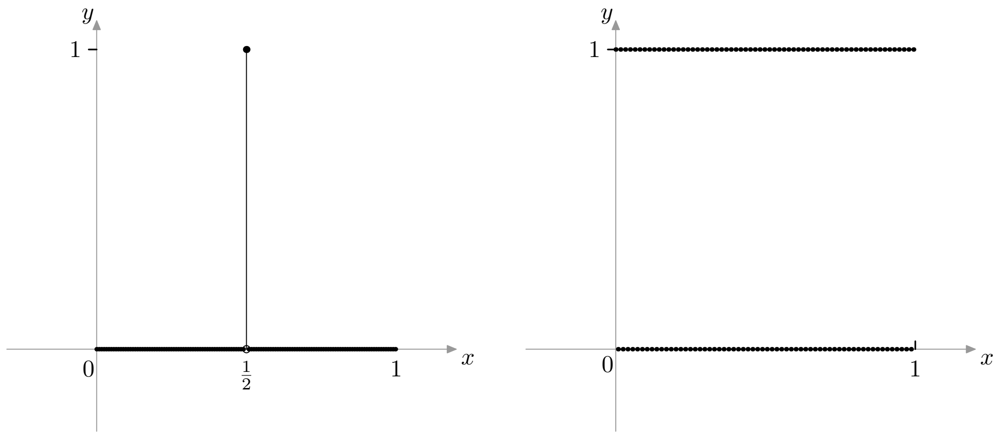


Obr. 3.4: Zjemnenie delenia – horné Darbouxove súčty

Lema 3.6. *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Potom*

$$m(b-a) \le s(f, D) \le S(f, D) \le M(b-a),$$

kde $m = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.



Obr. 3.5: Grafy funkcií g a χ z Príkladu 3.7

Dôkaz. Nech $D^* = \{x_0, x_1\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Keďže $s(f, D^*) = m(b-a)$, $S(f, D^*) = M(b-a)$ a každé iné $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je zjemnením D^*, podľa Lemy 3.4 máme

$$m(b-a) = s(f, D^*) \le s(f, D) \le S(f, D) \le S(f, D^*) = M(b-a),$$

čo je náš požadovaný výsledok. $\square$

Vráťme sa na chvíľu k tvrdeniu (iii) Lemy 3.4. Podľa tohto tvrdenia pre každú ohraničenú funkciu f na $\langle a, b\rangle$ je množina A všetkých dolných Darbouxových súčtov ohraničená zhora ľubovoľným horným Darbouxovým súčtom a množina B všetkých horných Darbouxových súčtov je ohraničená zdola ľubovoľným dolným Darbouxovým súčtom. Keďže sú to neprázdne množiny, tak

$$\sup A \le \inf B, \quad \text{t.j.} \quad \sup_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f, D) \le \inf_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f, D).$$

Nasledujúc Darbouxovu konštrukciu $\mathscr{R}$-integrálu položme $\sup A = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazvime túto hodnotu *dolný Riemannov integrál* (skrátene dolný $\mathscr{R}$-integrál) a $\inf B = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *horný Riemannov integrál* (skrátene horný $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.[3] Zrejme pre každú ohraničenú funkciu $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ existuje dolný a horný $\mathscr{R}$-integrál a platí $(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Príklad 3.7. 1.) Nech $f(x) = \alpha$ je konštantná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Potom pre ľubovoľné delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $m_i = M_i = \alpha$, takže

$$s(f, D) = S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \Delta x_i = \alpha(b-a),$$

teda $(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} \alpha\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} \alpha\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a)$.

[3] Poznamenajme, že tieto pojmy nepatria Darbouxovi, ale zaviedol ich roku 1881 Vito Volterra (1860–1940).

2.) Nech $g : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je daná predpisom $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1\rangle \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$, viď Obr. 3.5. Je ľahké vidieť, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle 0,1\rangle$ je $s(g,D) = 0$, a teda $(\mathscr{R})\underline{\int_0^1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Pre určenie horného $\mathscr{R}$-integrálu uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle 0,1\rangle$ a $\frac{1}{2} \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pre nejaké $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Potom $S(g,D) \le 2\max\{\Delta x_i; i = 1,2,\dots,n\}$. Keďže neustále môžeme zjemniť delenie D tak, aby $\max\{\Delta x_i; i = 1,2,\dots,n\}$ bolo ľubovoľne malé, potom

$$(\mathscr{R})\overline{\int_0^1} g(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(g,D) = 0 = (\mathscr{R})\underline{\int_0^1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.) Nech χ je Dirichletova funkcia na $\langle a,b\rangle$, viď Obr. 3.5. Pre každé delenie $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ platí $m_i = 0$, $M_i = 1$, teda

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \qquad S(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Potom ale $(\mathscr{R})\underline{\int_a^b}\chi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ a $(\mathscr{R})\overline{\int_a^b}\chi(x)\,\mathrm{d}x = b - a$.

Tieto príklady ukazujú, že v nerovnosti medzi dolným a horným $\mathscr{R}$-integrálom môže nastať rovnosť, ale aj ostrá nerovnosť. Z geometrických úvah zo začiatku kapitoly by malo byť zrejmé, že nás budú zaujímať tie funkcie, pre ktoré nastane rovnosť dolného a horného $\mathscr{R}$-integrálu.

Definícia 3.8. Nech $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, pre ktorú platí $(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom hovoríme, že *funkcia f je Riemannovsky integrovateľná* (skrátene $\mathscr{R}$-integrovateľná) na $\langle a,b\rangle$ a túto spoločnú hodnotu horného a dolného $\mathscr{R}$-integrálu nazývame *Riemannov integrál* (skrátene $\mathscr{R}$-integrál) funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$. Označujeme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií na intervale $\langle a,b\rangle$ označujeme $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$.

Poznámka 3.9. Teda funkcia je $\mathscr{R}$-integrovateľná, akk existuje *jediné číslo, ktoré oddeľuje dolné a horné Darbouxove súčty, t.j. je väčšie alebo sa rovná každému dolnému a je menšie alebo sa rovná každému hornému Darbouxovmu súčtu* (spomínané číslo je $\mathscr{R}$-integrál danej funkcie na danom intervale). V opačnom prípade existuje celý nedegenerovaný interval takých čísel – taká funkcia nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná (uvedený príklad Dirichletovej funkcie), resp. hovoríme, že $\mathscr{R}$-integrál neexistuje. Z uvedenej konštrukcie taktiež vyplýva, že označenie nezávislej premennej písmenom x nie je podstatné, teda $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = (\mathscr{R})\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ak existuje). Hodnota $\mathscr{R}$-integrálu v podstate závisí od funkcie f a intervalu $\langle a,b\rangle$.

Poznámka 3.10. Darbouxova definícia $\mathscr{R}$-integrálu vlastne hovorí, že ak $\mathscr{R}$-integrál funkcie f existuje, t.j.

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f,D) = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D),$$

tak pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ platí

$$s(f,D) \le (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D).$$

To je v zhode s našou motiváciou s kruhom (obsah vpísaných n-uholníkov je menší alebo sa rovná obsahu kruhu, ktorý je menší alebo sa rovná obsahu opísaných n-uholníkov). Pri kruhu sme potom zobrali limitu vpísaných a opísaných n-uholníkov, kde táto spoločná hodnota oboch limít bola presne obsahom kruhu. Ukážeme neskôr, že tento postup sa dá aplikovať aj v prípade $\mathscr{R}$-integrálu (pozri limitné kritériá $\mathscr{R}$-integrovateľnosti a $\mathscr{R}$-integrál ako limita integrálnych súčtov).

Z uvedeného príkladu vyplýva, že *každá konštantná funkcia je $\mathscr{R}$-integrovateľná na ľubovoľnom intervale* $\langle a,b\rangle$. Na základe príkladu Dirichletovej funkcie vidíme, že $\mathscr{R}$-integrál nezahŕňa všetky (ani dokonca ohraničené) funkcie, ale ukážeme, že trieda $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií je dostatočne široká a postačujúca našim potrebám. Otázku integrovateľnosti Dirichletovej funkcie rieši až Lebesgueov integrál, ktorého konštrukcia je komplikovanejšia a je obsahom iného kurzu. Spomeňme len, že v prípade Dirichletovej funkcie je $(\mathscr{L})\int_a^b \chi(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Skonštruujte delenie intervalu $\langle -1,2\rangle$ na 10 rovnakých častí.

◇ Skonštruujte delenie intervalu $\langle -5,0\rangle$ s 11 deliacimi bodmi tvoriacimi konečnú geometrickú postupnosť.

◇ Pre funkciu f vypočítajte dolný a horný Darbouxov súčet na zadanom intervale pomocou jeho delenia na n rovnakých častí, ak

(a) $f(x) = x^3$ pre $x \in \langle -2,3\rangle$;

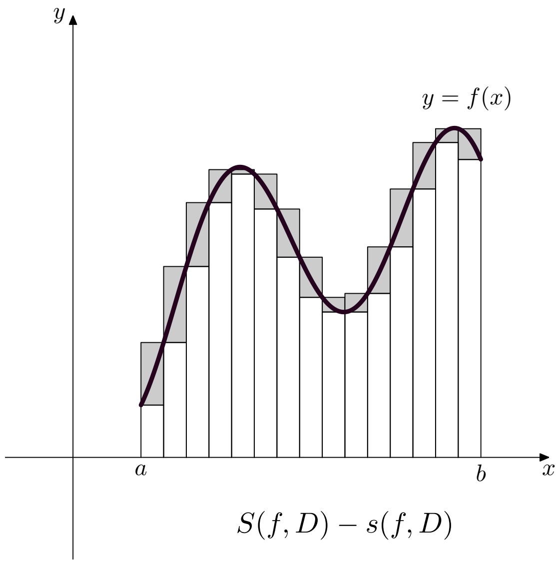
(b) $f(x) = \sqrt{x}$ pre $x \in \langle 0,1\rangle$;

(c) $f(x) = 2^x$ pre $x \in \langle 0,10\rangle$.

3.1 Kritériá $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie

Vo všeobecnosti je na základe definície ťažké rozhodnúť, či nejaká ohraničená funkcia je $\mathscr{R}$-integrovateľná. V tejto časti odvodíme niekoľko nutných a postačujúcich podmienok $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie, ktoré môžeme považovať za ekvivalentné zavedenie $\mathscr{R}$-integrálu.

Nasledujúce kritérium bude pre nás dôležité z teoretického hľadiska, avšak nehovorí nič o hodnote $\mathscr{R}$-integrálu. V určitom zmysle ide o analogické kritérium ku Cauchyho-Bolzanovmu kritériu konvergencie postupnosti (premyslite si to!).



Veta 3.11 (Darbouxovo kritérium). *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle)\ S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Dôkaz. $\Rightarrow$ Pre $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ položme $I = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, teda $I = \sup\limits_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} s(f, D) = \inf\limits_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f, D)$. Z vlastnosti suprema a infima k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existujú $D_1, D_2 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ také, že

$$s(f, D_1) > I - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad S(f, D_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nech $D = D_1 \cup D_2$. Potom podľa Lemy 3.4 platí $s(f, D) \geq s(f, D_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ a $S(f, D) \leq S(f, D_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Odčítaním týchto nerovností dostávame

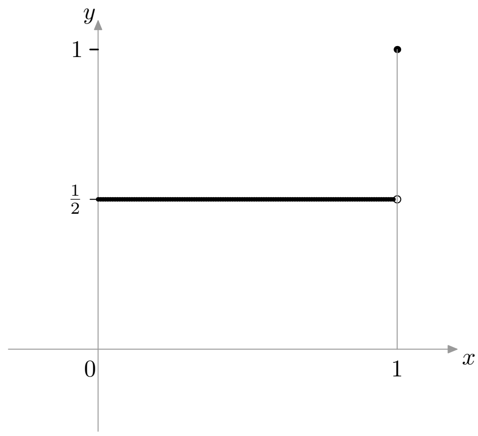
$$S(f, D) - s(f, D) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Keďže $(\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq s(f, D)$ a $(\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, D)$ pre ľubovoľné $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, potom

$$0 \leq (\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Keďže ε je ľubovoľné, potom $(\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, t.j. $(\mathscr{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, teda $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. $\square$

Príklad 3.12. Rozhodnite o $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie f na intervale $\langle 0, 1\rangle$, ak $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \langle 0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.



Obr. 3.6: Graf funkcie z Príkladu 3.12

Uvažujme delenie $D = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, 1\}$. Potom $m_i = \frac{1}{2}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ a $M_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & i = n \end{cases}$. Keďže $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, potom $s(f, D) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \frac{1}{2}$ a

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \Delta x_i + \Delta x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$

preto $S(f, D) - s(f, D) = \frac{1}{2n}$. Keďže ku každému $\varepsilon > 0$ existuje podľa Archimedovej vlastnosti $n \in \mathbb{N}$také, že $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, potom podľa Darbouxovho kritéria $f \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$.

Poznámka 3.13. Pomocou Darbouxovho kritéria vieme jednoducho dokázať, že Dirichletova funkcia χ nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná na žiadnom intervale $\langle a, b\rangle$. Totiž, ak $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, tak podľa Príkladu 3.7 je $S(f, D) = b - a$ a $s(f, D) = 0$. Potom teda existuje $\varepsilon \in (0, b-a)$ také, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ platí $S(f, D) - s(f, D) \geq \varepsilon$, teda $\chi \notin \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je dané delenie $D_n \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, tak hovoríme, že je daná *postupnosť delení* $(D_n)_1^\infty$ *intervalu* $\langle a, b\rangle$, skrátene zapisujeme $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Považujeme za potrebné upozorniť, že index n nemusí súvisieť s počtom deliacich bodov delenia D_n!

Veta 3.14 (limitné kritérium). *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.*

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad a \quad \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Ak existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, D_n).$$

Dôkaz. (i) Nech $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a položme $I = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Potom pre každé $n \in N$ existujú $D_n', D_n'' \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ také, že $s(f,D_n') > I - \frac{1}{n}$ a $S(f,D_n'') < I + \frac{1}{n}$. Položme $D_n = D_n' \cup D_n''$. Potom pre každé $n \in N$ platí

$$I - \frac{1}{n} < s(f,D_n') \le s(f,D_n) \le S(f,D_n) \le S(f,D_n'') < I + \frac{1}{n}.$$

Podľa vety o zovretí $I - \frac{1}{n} \to I$ a $I + \frac{1}{n} \to I$ pre $n \to \infty$, teda aj $s(f,D_n) \to I$ a $S(f,D_n) \to I$ pre $n \to \infty$.

(ii) Nech existuje $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,D_n) = I = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n)$, teda pre každé $\varepsilon > 0$ existujú $P', P'' \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ také, že $s(f,P') > I - \frac{\varepsilon}{2}$ a $S(f,P'') < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Nech $P = P' \cup P''$. Potom $s(f,P) \ge s(f,P') > I - \frac{\varepsilon}{2}$ a $S(f,P) \le S(f,P'') < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Odčítaním týchto nerovností dostávame

$$S(f,D) - s(f,D) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \Big(I - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podľa Darbouxovho kritéria $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$.

Keďže $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,D_n) = I = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n)$ a $s(f,D_n) \le (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le S(f,D_n)$, potom podľa vety o zovretí platí, že $I = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Príklad 3.15. Rozhodnite o $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\langle -2,1\rangle$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme delenie $D_n = \{-2, -2 + \frac{1}{n}, \dots, -2 + \frac{3n-1}{n}, -2 + \frac{3n}{n} = 1\}$. Potom

$$s(f,D_n) = \underbrace{[(-1) + (-1) + \cdots + (-1)]}_{2n \text{ sčítancov}} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{[1 + 1 + \cdots + 1]}_{n-1 \text{ sčítancov}} \cdot \frac{1}{n} = -1 - \frac{1}{n}$$

a

$$S(f,D_n) = \underbrace{[(-1) + (-1) + \cdots + (-1)]}_{2n-1 \text{ sčítancov}} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{[1 + 1 + \cdots + 1]}_{n \text{ sčítancov}} \cdot \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

teda $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n) = -1$, z čoho podľa limitného kritéria vyplýva, že $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle -2,1\rangle$ a platí $(\mathscr{R}) \int_{-2}^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = -1$.

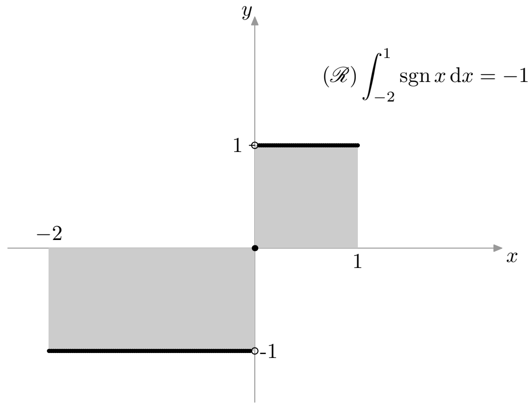
Poznamenajme, že v tomto prípade sme mohli uvažovať aj postupnosť delení $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, 1\}$ alebo $D_n = \{-2, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1\}$ (vyskúšajte!).

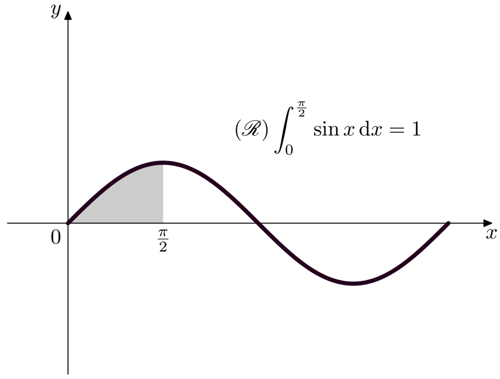
Príklad 3.16. Vypočítajte $(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$. Keďže $f(x) = \sin x$ je rastúca funkcia na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, uvažujme postupnosť delení $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $x_i = \frac{i\pi}{2n}$. Potom

$$s(f,D_n) = \sum_{i=1}^n \sin x_{i-1}\,\Delta x_i = \frac{\pi}{2n}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

a tiež

$$S(f,D_n) = \sum_{i=1}^n \sin x_i\,\Delta x_i = \frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \sin\frac{3\pi}{2n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{2n}\right).$$





Keďže $S(f, D_n) - s(f, D_n) = \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}$ a podľa Archimedovej vlastnosti ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{\pi}{2n} < \varepsilon$, tak podľa Darbouxovho kritéria $f \in \mathscr{R}\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (neskôr ukážeme všeobecne, že každá monotónna funkcia je $\mathscr{R}$-integrovateľná na príslušnom intervale, viď Veta 3.41).

Pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ také, že $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ platí

$$\sum_{j=1}^{k} \sin j\alpha = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{j=1}^{k} 2 \sin j\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Použitím vzorca $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ dostávame

$$\begin{aligned}
&\sin \alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin k\alpha \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} + \cdots + \cos \frac{(2k-1)\alpha}{2} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2} \right),
\end{aligned}$$

pomocou čoho už ľahko vypočítame

$$\begin{aligned}
(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n})}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1.
\end{aligned}$$

Poznámka 3.17. Limitné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti môžeme formulovať nasledovne: $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ *práve vtedy, keď existuje nenulová postupnosť* $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ *taká, že odpovedajúce postupnosti dolných a horných Darbouxových súčtov konvergujú k spoločnej hodnote.* To nám však nedáva žiadnu informáciu o tom, akú postupnosť zobrať, aby sme $\mathscr{R}$-integrovateľnosť funkcie vyšetrili. Dokonca niekedy taká nenulová postupnosť delení ani neexistuje (vyskúšajte to pre funkciu $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$!). Preto by sme potrebovali mať k dispozícii niečo „lepšie“. Ak si dobre všimneme, v predchádzajúcom príklade sme na výpočet integrálu $(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x$ uvažovali delenie intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ na zhodné dieliky. To ale vôbec nie je náhoda, pretože také postupnosti delení budú pre nás dôležité.

Definícia 3.18. Nech $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. *Normou delenia* D nazývame číslo $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$. Postupnosť $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ nazývame *normálna postupnosť delení* intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Poznámka 3.19. Inými slovami, *normou delenia D rozumieme najväčšiu z dĺžok čiastočných intervalov delenia D*. Niekedy je to študentmi mylne interpretované ako najväčší z dielikov. Preto zdôrazňujeme: norma delenia je číslo, nie interval (dielik)! Taktiež poznamenajme, že niektorí autori používajú pojem *nulová postupnosť delení* namiesto pojmu normálna postupnosť delení.

Príklad 3.20. 1.) Ak $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, t.j. n-té delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ rozdelí $\langle a, b\rangle$ na n rovnakých častí (tzv. *ekvidištančné* alebo pravidelné delenie), potom $\nu(D_n) = \frac{b-a}{n}$ a keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$, je takáto postupnosť $(D_n)_1^\infty$ normálna.

2.) Ak $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, $0 < a < b$, kde $x_i = aq^i$ pre $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ (deliace body sú členmi geometrickej postupnosti), tak

$$\nu(D_n) = \max\left\{q^i\left(1 - \frac{1}{q}\right);\ i = 1, 2, \dots, n\right\} = q^n\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{a}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right).$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = 1$, je postupnosť $(D_n)_1^\infty$ normálna.

Naším nasledujúcim cieľom bude zlepšiť limitné kritérium pre tie postupnosti delení, ktoré sú normálne. Prv ako vyslovíme príslušnú vetu, vyslovíme nasledujúcu pomocnú lemu. Z Lemy 3.4 vieme, že pre D' zjemnenie delenia D sa horný Darbouxov súčet $S(f, D')$ nezväčší oproti $S(f, D)$. Otázkou by teda mohlo byť určenie dolného odhadu, o koľko sa zmenší $S(f, D')$ oproti $S(f, D)$. Samozrejme, nasledujúci výsledok sa dá formulovať aj pre dolné Darbouxove súčty (urobte to!).

Poznámka 3.21. Pripomeňme, že $M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Číslo $M - m$ v nasledujúcej leme sa zvykne označovať ako *oscilácia funkcie f na intervale* $\langle a, b\rangle$. Všimnime si, že s osciláciou funkcie na čiastočných intervaloch sme sa stretli už pri Darbouxovom kritériu, pretože

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i,$$

teda rozdiel medzi horným a dolným Darbouxovým súčtom je vyjadrený pomocou oscilácií $M_i - m_i$ na čiastkových intervaloch. Niekedy sa preto príslušné tvrdenia nazývajú aj *oscilačnými kritériami* $\mathscr{R}$-integrovateľnosti.

Lema 3.22. *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $\delta > 0$. Ak $D, D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, kde $\nu(D) < \delta$ a $D \subseteq D'$ s nanajvýš N deliacimi bodmi navyše, potom*

$$S(f, D') \geq S(f, D) - N(M - m)\delta.$$

Dôkaz. Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a bod c je prvý deliaci bod delenia D', ktorý nie je deliacim bodom delenia D, t.j. existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ také, že $x_{i-1} < c < x_i$. Označme $D'' = D \cup \{c\}$ a skúmajme $S(f, D'')$. Tieto sa líšia od $S(f, D)$ o príspevok

$$(c - x_{i-1}) \sup_{x \in \langle x_{i-1}, c\rangle} f(x) + (x_i - c) \sup_{x \in \langle c, x_i\rangle} f(x)$$

namiesto $(x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = M_i \Delta x_i$. Z vlastností suprema a infima platí, že $\sup_{x \in \langle x_{i-1}, c\rangle} f(x) \geq m$ a $\sup_{x \in \langle c, x_i\rangle} f(x) \geq m$ (pretože m je najväčšie dolné ohraničenie f na $\langle a, b\rangle$). Potom

$$\begin{aligned}
&S(f, D'') - S(f, D) \\
&= (c - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in \langle x_{i-1}, c\rangle} f(x) + (x_i - c) \cdot \sup_{x \in \langle c, x_i\rangle} f(x) - (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \\
&\geq (c - x_{i-1})m + (x_i - c)m - M(x_i - x_{i-1}) = m(x_i - x_{i-1}) - M(x_i - x_{i-1}) \\
&= (m - M)\Delta x_i = -(M - m)\Delta x_i \geq -(M - m)\delta,
\end{aligned}$$

pretože $\nu(D) = \max\{\Delta x_i; i = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$. Z toho teda dostávame $S(f, D'') \geq S(f, D) - (M - m)\delta$, teda pridaním jedného deliaceho bodu k deleniu D sa horný Darbouxov súčet nezmenší o viac ako $(M-m)\delta$. Ak tento proces zopakujeme $(N-1)$-krát, dostávame, že horný Darbouxov súčet (prislúchajúci funkcii f a deleniu D) sa nezmenší o viac ako $N(M - m)\delta$, t.j. $S(f, D') \geq S(f, D) - N(M - m)\delta$. □

Teraz sme pripravení dokázať vylepšené limitné kritérium využívajúce iba tie postupnosti delení, ktoré sú normálne.

Veta 3.23 (limitné kritérium – normálna postupnosť delení). *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je normálna postupnosť delení.*

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$.

(ii) Ak existujú $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n) = I = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

Poznámka 3.24. Všimnime si najprv, že časť (ii) je špeciálnym prípadom Vety 3.14 (ii), teda podmienka normálnej postupnosti je tu navyše. Preto iba časť (i) závisí od tejto podmienky. Naozaj, ak by sme ju vynechali, veta neplatí! Napr. $f(x) = x$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle 0, 1\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ (zdôvodnite!). Ak vezmeme postupnosť delení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ stále rovnakú, t.j. $D_n = \{0, 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$, potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $S(f, D_n) = 1$ a $s(f, D_n) = 0$, teda

$$0 = \lim_{n\to\infty} s(f, D_n) \neq \frac{1}{2} = (\mathscr{R}) \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = 1.$$

Pristúpme teraz k dôkazu vety.

Dôkaz. (i) Nech $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $(D_n)_1^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Položme $I = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a ukážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n) = I$ (analogicky sa ukáže pre dolné Darbouxove súčty).

Keďže $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ zoberme $P_n \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ také, že $S(f,P_n) < I+\frac{1}{n}$ a označme počet deliacich bodov tohto delenia N_n. Nech $\delta = \frac{1}{N_n(M-m)n}$ a zoberme také D_n, že $\nu(D_n) < \delta$ (pripomeňme, že postupnosť $(D_n)_1^\infty$ je normálna, a preto sa to dá urobiť). Ak teraz použijeme Lemu 3.22 na delenie D_n (namiesto D) a $D_n' = D_n \cup P_n$ (namiesto D'), potom

$$S(f,D_n') \geq S(f,D_n) - N_n(M-m)\delta = S(f,D_n) - \frac{1}{n},$$

pretože D_n' má nanajvýš N_n deliacich bodov navyše oproti deleniu D_n. Z toho dostávame, že

$$S(f,D_n) \leq S(f,D_n') + \frac{1}{n} \leq S(f,P_n) + \frac{1}{n} < I + \frac{2}{n},$$

teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $I \leq S(f,D_n) < I+\frac{2}{n}$. Podľa vety o zovretí máme $S(f,D_n) \to I$ pre $n \to \infty$, čo sme chceli dokázať. $\square$

Príklad 3.25. Vypočítajte $(\mathscr{R})\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Zvoľme postupnosť ekvidištančných delení intervalu $\langle a,b\rangle$, t.j. $D_n = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, kde $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0,1,\dots,n$. Keďže e^x je rastúca funkcia na každom $\langle a,b\rangle$, potom

$$s(\mathrm{e}^x,D_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{x_{i-1}}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\left(1+\mathrm{e}^\nabla+\mathrm{e}^{2\nabla}+\cdots+\mathrm{e}^{(n-1)\nabla}\right),$$

kde $\nabla = \frac{b-a}{n}$ a podobne

$$S(\mathrm{e}^x,D_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{x_i}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\left(\mathrm{e}^\nabla+\mathrm{e}^{2\nabla}+\cdots+\mathrm{e}^{n\nabla}\right).$$

Keďže

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s(\mathrm{e}^x,D_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\left(1+\mathrm{e}^\nabla+\mathrm{e}^{2\nabla}+\cdots+\mathrm{e}^{(n-1)\nabla}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\frac{1-\mathrm{e}^{n\nabla}}{1-\mathrm{e}^\nabla}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a)}{n(\mathrm{e}^{\frac{b-a}{n}}-1)} = \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\end{aligned}$$

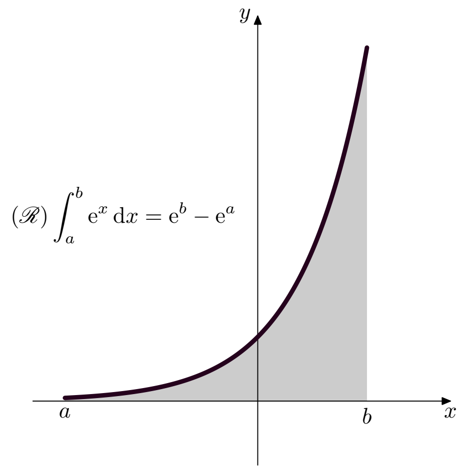
a analogicky $\lim\limits_{n\to\infty} S(\mathrm{e}^x,D_n) = \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a$, potom $(\mathscr{R})\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a$.

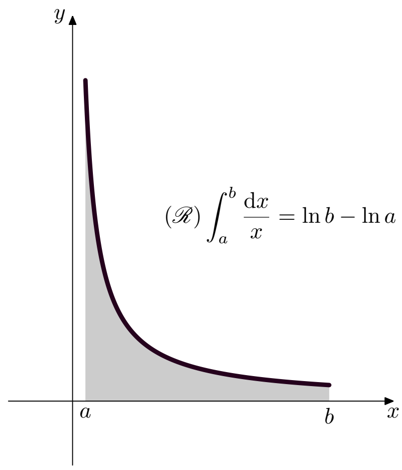
Príklad 3.26. Vypočítajte $(\mathscr{R})\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $0 < a < b$. Nech $D_n = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $x_i = aq^i$ pre $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Keďže $\frac{1}{x}$ je klesajúca funkcia na každom $\langle a,b\rangle \subset (0,+\infty)$, potom

$$S\left(\frac{1}{x},D_n\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}}\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{aq_{i-1}}(aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^n (q-1) = n(q-1)$$

a podobne

$$s\left(\frac{1}{x},D_n\right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\Delta x_i = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n (q-1) = \frac{1}{q}S\left(\frac{1}{x},D_n\right) = \frac{n(q-1)}{q}.$$



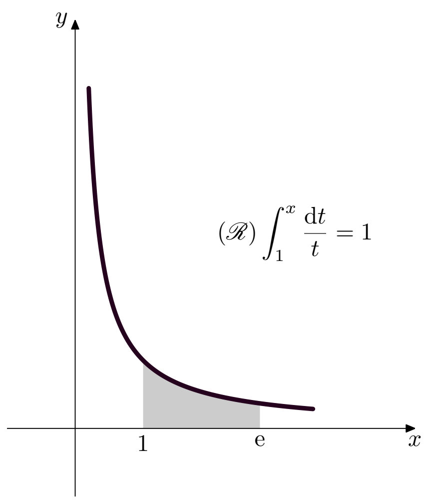


Keďže $b = aq^n$, tak $\ln b = \ln a + n \ln q$, z čoho máme $n = \frac{\ln b - \ln a}{\ln q}$, a teda

$$\lim_{n\to\infty} S\left(\frac{1}{x}, D_n\right) = \lim_{n\to\infty} n(q-1) = (\ln b - \ln a) \lim_{q\to 1^+} \frac{q-1}{\ln q} = \ln b - \ln a.$$

Podobným spôsobom vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} s\left(\frac{1}{x}, D_n\right) = \ln b - \ln a$, a preto $(\mathscr{R})\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$.

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva jedno zaujímavé zistenie týkajúce sa geometrickej interpretácie Eulerovho čísla e: *číslo* e *je jediné reálne číslo x, pre ktoré* $(\mathscr{R})\int_1^x \frac{dt}{t} = 1$, t.j. obsah plochy pod grafom hyperboly $\frac{1}{x}$ na intervale $\langle 1, e\rangle$ je rovný 1 (môžeme to považovať za ekvivalentnú definíciu čísla e). Ak sa teraz vrátime k poznámke o čísle π na konci Kapitoly 2, vidíme ďalší krásny súvis medzi dôležitými číslami matematickej analýzy a integrálnym počtom.



Z uvedených príkladov vyplýva, že spôsob výpočtu $\mathscr{R}$-integrálu pre jednoduché (elementárne) funkcie je značne komplikovaný a vôbec nie taký príjemný ako výpočet $\mathscr{N}$-integrálu. Postupne sa dopracujeme k rozumnejšiemu výpočtu. Zatiaľ spomeňme, že uvedený spôsob môže vhodne poslúžiť na iné účely.

Príklad 3.27. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$. Keďže

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right),$$

uvažujme postupnosť delení $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a $f(x) = x$. Keďže $(D_n)_1^\infty$ je normálna a $f \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} S(x, D_n) = (\mathscr{R})\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Výsledok celej tejto časti o kritériách $\mathscr{R}$-integrovateľnosti môžeme zhrnúť do nasledujúceho (jednoduchého) tvrdenia.

Tvrdenie 3.28. *Ak $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, potom nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$;

(ii) pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iii) existuje normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, *pre ktorú platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$;

(iv) existuje postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, *pre ktorú platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$.

Dôkaz. Časť (i)⇒(ii) vyplýva z Vety 3.23(i), implikácie (ii)⇒(iii)⇒(iv) sú triválne a časť (iv)⇒(i) sme dokázali vo Vete 3.14. □

Na záver tejto časti spomeňme ešte jedno užitočné kritérium $\mathscr{R}$-integrovateľnosti, ktoré je prepisom Darbouxovho kritéria pre normálnu postupnosť delení. Nezávisle ho dokázali v roku 1875 Darboux a Du Bois-Reymond.

Veta 3.29 (Du Bois-Reymond, Darboux 1875). *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle, \nu(D) < \delta)\ S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Dôkaz. Postačujúca podmienka $\mathscr{R}$-integrovateľnosti plynie z Darbouxovho kritéria.

Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom podľa Darbouxovho kritéria pre ľubovoľné (ale pevné) $\varepsilon > 0$ zoberme $D' \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, $D' = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ také, že $S(f, D') - s(f, D') < \varepsilon$. Keďže D' má konečný počet deliacich bodov, zoberme ľubovoľné $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ také, že $\nu(D) < \delta$, kde $\delta = \frac{\varepsilon}{2(N-1)(M-m)}$. Potom $D'' = D' \cup D$ obsahuje nanajvýš $N - 1$ deliacich bodov navyše oproti deleniu D a podľa Lemy 3.22 (zahŕňame aj horné, aj dolné Darbouxove súčty) máme

$$S(f, D)-s(f, D)-2(N-1)(M-m)\delta \le S(f, D'')-s(f, D'') \le S(f, D')-s(f, D') < \varepsilon,$$

a teda $S(f, D) - s(f, D) < 2\varepsilon$. □

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nech $D_1, D_2 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a $D_2 \subseteq D_1$. Čo platí pre ich normy?

◇ Zistite, aký je minimálny počet deliacich bodov delenia $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, ak $\nu(D) = \frac{b-a}{p}$, kde $p \in \mathbb{N}$.

◇ Nech $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a d_n je počet deliacich bodov delenia D_n taký, že $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$. Je $(D_n)_1^\infty$ normálna postupnosť delení?

◇ Do Tvrdenia 3.28 sa priamo ponúka doplniť tvrdenie: *Pre každú postupnosť* $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty}(S(f, D_n) - s(f, D_n)) = 0$. Je to možné urobiť?

3.2 $\mathscr{R}$-integrál ako limita integrálnych súčtov

Cesta vybudovania $\mathscr{R}$-integrálu, ktorú sme predstavili doteraz, nie je pôvodnou Riemannovou myšlienkou konštrukcie integrálu nesúceho jeho meno. Totiž zvolený spôsob ($\mathscr{R}$-integrál ako spoločná hodnota horného a dolného $\mathscr{R}$-integrálu) pochádza z roku 1875 od Darbouxa (preto sa niekedy označuje ako Darbouxov integrál). Túto cestu sme zvolili preto, lebo pekne odráža geometrickú predstavu určitého integrálu a myslíme si, že práve preto je vhodná na prvé zoznámenie sa s $\mathscr{R}$-integrálom. Aby sme však boli korektní k názvu Riemannov integrál, bolo by slušné zoznámiť sa s pôvodnou Riemannovou myšlienkou. Bezpochyby o Riemannovej matematickej veľkosti dnes musíme konštatovať, že v tomto smere prebral a rozšíril platnosť myšlienky iného velikána svojej doby – CAUCHYHO.

Cauchy vo svojom prístupe k integrálu uvažuje spojitú funkciu f na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, potom definuje aproximujúci súčet

$$S_C = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i, \tag{3.1}$$

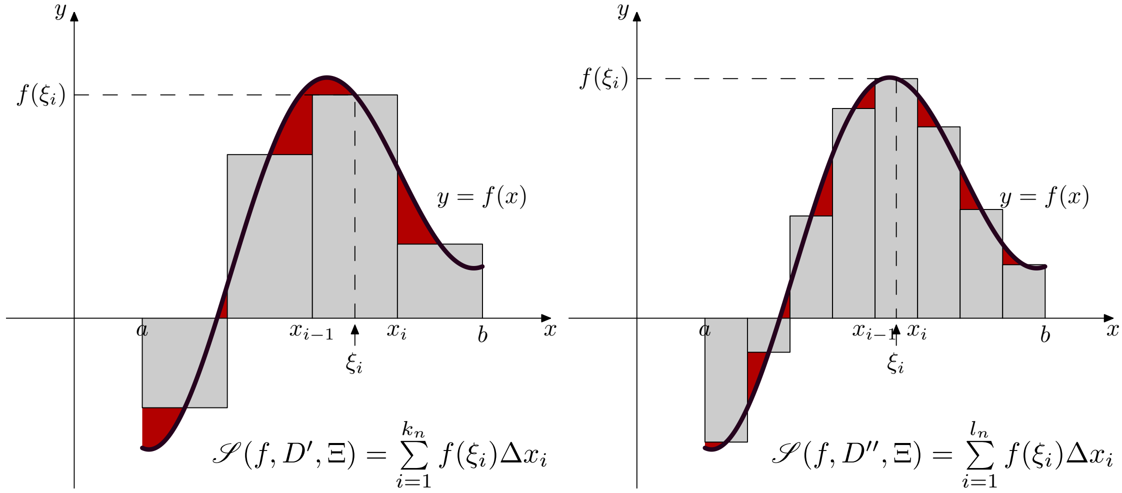
ktorým vyjadril súčet obsahov obdĺžnikov so základňou $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a výškou, ktorá je daná funkčnou hodnotou $f(x_{i-1})$. Cauchyho myšlienkou je *definovať integrál ako limitu súčtu* tvaru (3.1), keď maximum dĺžok čiastočných intervalov (t.j. norma delenia D intervalu $\langle a, b\rangle$) bude konvergovať k nule. Vidíme tu teda snahu vybudovať určitý integrál ako „nejakú limitu“ (treba však zdôrazniť, že nie hocijakú, ale špeciálneho typu! – viď Poznámku 3.34). Túto myšlienku prevzal a zveľadil Riemann nasledujúcim spôsobom, ktorý priblížime priamo citátom z jeho habilitačnej práce „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ z roku 1853, viď [12], Druhý díl str. 254 (ako názov uvádza, práca pojednávala o reprezentovateľnosti funkcie trigonometrickým radom, teda žiadny špeciálny záujem o integrál).

„Neurčitosť, ktorá ešte v niektorých základných bodoch teórie určitého integrálu panuje, nás núti predostrieť niečo o pojme určitého integrálu a rozsahu jeho platnosti. Teda po prvé: Čo sa má rozumieť pod $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? Aby sme si to ozrejmili, zvoľme medzi a a b postupnosť hodnôt $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ zoradenú vzostupne podľa veľkosti a označme kvôli krátkosti $x_1 - a$ znakom δ_1, $x_2 - x_1$ znakom δ_2, až $b - x_{n-1}$ znakom δ_n a nech $\varepsilon > 0$. Potom hodnota súčtu

$$S_R = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(a + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(a + \varepsilon_n\delta_n)$$

bude závisieť na voľbe parametrov δ a veličín ε. Ak bude mať tento súčet tú vlastnosť, že nech sú δ a ε zvolené akokoľvek, bude sa nekonečne blížiť k pevnej hranici A pre všetky δ nekonečne malé, potom sa táto hodnota (t.j. A) nazýva $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak túto vlastnosť nemá, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nemá význam.“

V oboch prístupoch vidíme, že sa objavujú nejaké súčty, ktoré sme označili S_C a S_R. Taktiež sú zaujímavé hodnoty argumentu funkcie, ktoré sa objavujú v Cauchyho a Riemannových súčtoch S_C a S_R. Keďže tieto dve kvantity budú zohrávať dôležitú úlohu, zavedieme si pre nich nasledujúce označenie.



Obr. 3.7: Integrálne súčty pre rôzne delenia a rovnaký výber reprezentantov

Definícia 3.30. Nech $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$. Potom množinu

$$\Xi=\{\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle;\ i=1,2,\dots,n\}$$

nazývame *výber reprezentantov* delenia D a bod ξ_i nazývame reprezentantom i-teho čiastočného intervalu. *Integrálnym súčtom* prislúchajúcim funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ rozumieme číslo

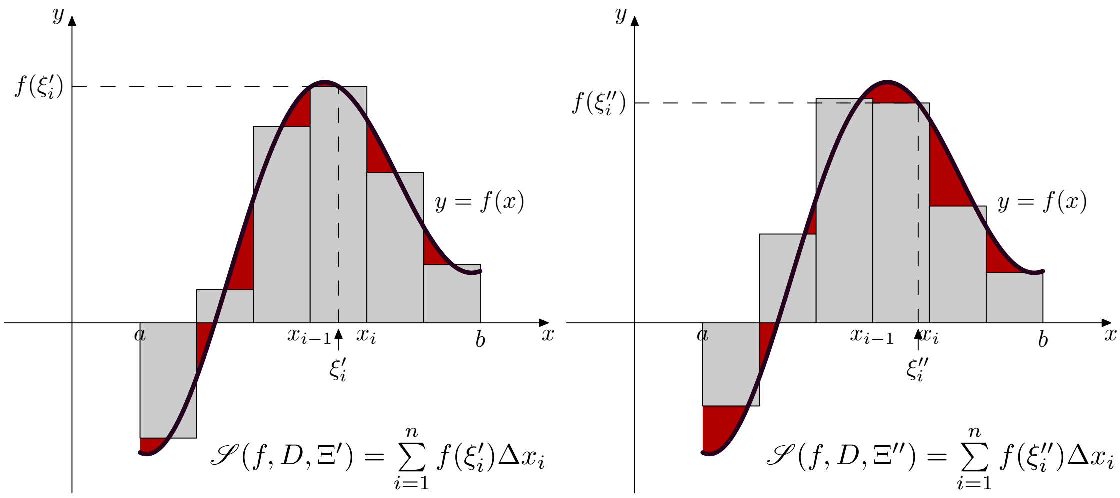
$$\mathscr{S}(f,D,\Xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Na základe tejto definície môžeme stručne povedať, že Cauchy vo svojej definícii integrálu považuje za reprezentanta *ľavý koncový bod* čiastočného intervalu, t.j. $\xi_i = x_{i-1}$ (samozrejme, to je v jeho prípade možné, pretože funkcia f je spojitá) a Riemann zovšeobecňuje tento prístup uvažovaním *ľubovoľného reprezentanta* $\xi_i=a+\delta_i\varepsilon_i$. Obe čísla S_C a S_R sú potom integrálnymi súčtami prislúchajúcimi funkcii f, deleniu D a príslušnému výberu reprezentantov. Z uvedeného naozaj vidieť, že Riemannov prístup je všeobecnejší.

Poznámka 3.31. Treba si uvedomiť, že pre konkrétnu funkciu f hodnota čísla $\mathscr{S}(f,D,\Xi)$ závisí od zvoleného delenia D, viď Obr. 3.7 a tiež od výberu reprezentantov Ξ z čiastočných intervalov tohto delenia, viď Obr. 3.8.

Poznámka 3.32. Nech $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\in(0,2)\\ 0, & x\in\{0,2\}\end{cases}$ a $D=\{0,1,2\}$. Potom $s(f,D)=-1$ a $S(f,D)=1$, ale pre každý výber reprezentantov Ξ delenia D je $-1<\mathscr{S}(f,D,\Xi)<1$. Všeobecne, z vlastnosti suprema a infima pre každé $D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle$ a pre každý výber reprezentantov Ξ platí

$$s(f,D)\le\mathscr{S}(f,D,\Xi)\le S(f,D).$$



Obr. 3.8: Integrálne súčty pre rovnaké delenie a rôzny výber reprezentantov

Dôležitejšou zmenou, ktorú Riemann v porovnaní s Cauchym urobil pri konštrukcii integrálu je, že Riemannov prístup *nemá na funkciu f žiadne požiadavky*. Riemann vo svojom spise doslova píše: „Vyšetrujme teda po druhé rozsah platnosti tohto pojmu (rozumej pojmu integrál), teda otázku: v ktorých prípadoch pripúšťa funkcia integráciu a v ktorých nie?“ Spôsob, akým túto otázku Riemann položil, je celkom typický pre novú matematiku, ktorá sa v 19. storočí formovala. Riemannova definícia sa totiž týka ľubovoľnej funkcie a ním položená otázka smeruje k vymedzeniu triedy funkcií, pre ktoré má ním zavedená definícia integrálu zmysel, t.j. zaujíma sa o dosah nového pojmu. Sformulujme teda všetky uvedené skutočnosti do nasledujúcej definície.

Definícia 3.33 (Riemann-Cauchy). Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia. Ak existuje $L \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$, $\nu(D) < \delta$ a každý výber reprezentantov Ξ platí $|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - L| < \varepsilon$, potom číslo L nazývame *Riemannov integrál* funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 3.34. Dôležitou črtou Riemannovej-Cauchyho definície integrálu je, že zavádza určitý integrál ako „limitu integrálnych súčtov“, t.j. Definíciu 3.33 môžeme skrátene zapísať v tvare

$$L = \lim_{\nu(D)\to 0} \mathscr{S}(f, D, \Xi).$$

Hoci tento pojem a jeho zápis pripomína pojem konečnej limity L reálnej funkcie f v reálnom čísle x_0 (teda známy fakt, ktorý sme označovali $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$), musíme byť však opatrní, pretože limita integrálnych súčtov do toho priamo nezapadá. Keby sme ju pod tento pojem chceli včleniť, museli by sme povedať, čo je v našom prípade premenná x, čo je funkcia f a o aký bod x_0 ide. Popravde by sme s tým mali isté ťažkosti. Len pre informáciu uvedieme, že v matematike existuje tak vybudovaný pojem limity, ktorý súčasne zahŕňa pojem limity funkcie, ktorý sme zaviedli skôr, aj pojem limity integrálnych súčtov (tzv. *Moorova-Smithova limita*[4]). Tento pojem je však nad rámec tohto kurzu, viď napr. [2].

[4] Eliakim Hastings Moore (1862–1932), čítaj „Múr“ a Herman Lyle Smith (???)

Pomocou Du Bois-Reymondovho–Darbouxovho kritéria sa dá jednoducho ukázať, že nami vybudovaný $\mathscr{R}$-integrál nie je nič iné ako limita integrálnych súčtov v zmysle uvedenej Riemannovej-Cauchyho definície (premyslite si to!). Z praktického hľadiska táto definícia opäť nie je veľmi vhodná, ale značne zjednoduší dôkazy niektorých vlastností, ktoré budú uvedené v nasledujúcich kapitolách.

Hoci sme uviedli, že $\mathscr{R}$-integrál nie je obyčajnou limitou, predsa len existuje určitý dôležitý súvis medzi $\mathscr{R}$-integrálom a limitou číselnej postupnosti (viď limitné kritériá $\mathscr{R}$-integrovateľnosti). Otázka by teda mohla znieť: *ak $\mathscr{R}$-integrál je limitou postupnosti dolných a horných Darbouxových súčtov (pre ľubovoľnú a normálnu postupnosť delení), či sa obdobné tvrdenie nedá dokázať pre integrálne súčty?* Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta 3.35 ($\mathscr{R}$-integrál ako špeciálna limita integrálnych súčtov). *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia.*

(i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení a Ξ_n je príslušný výber reprezentantov delení D_n, tak postupnosť $(\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n))_1^\infty$ konverguje a platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

(ii) Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a pre každý výber reprezentantov Ξ_n delení D_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a je stále tá istá, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí (3.2).

Dôkaz. (i) Nech $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$. Ak $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení a Ξ_n je príslušný výber reprezentantov delení D_n, potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $s(f, D_n) \le \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) \le S(f, D_n)$ a z limitného kritéria pre normálnu postupnosť delení plynie, že $s(f, D_n) \to I$ a $S(f, D_n) \to I$, teda podľa vety o zovretí existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = I$.

(ii) Nech $D_n = \{x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{l_n,n}\}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$, Ξ_n je príslušný výber reprezentantov delení D_n a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = I$.

Pre $n = 2k$ zoberme $\xi_{i,2k} \in \Xi_{2k}$ také, že

$$m_{i,2k} \le f(\xi_{i,2k}) < m_{i,2k} + \frac{1}{2k},$$

kde $m_{i,2k} = \inf\limits_{x\in I_{i,2k}} f(x)$. Pre $n = 2k - 1$ zoberme $\xi_{i,2k-1} \in \Xi_{2k}$ také, že

$$M_{i,2k-1} - \frac{1}{2k-1} < f(\xi_{i,2k-1}) \le M_{i,2k-1},$$

kde $M_{i,2k-1} = \sup\limits_{x\in I_{i,2k-1}} f(x)$. Potom

$$0 \le \mathscr{S}(f, D_{2k}, \Xi_{2k}) - s(f, D_{2k}) = \sum_{i=1}^{l_{2k}} (f(\xi_{i,2k}) - m_{i,2k})\Delta x_{i,2k} < \sum_{i=1}^{l_{2k}} \frac{1}{2k}\Delta x_{i,2k} = \frac{b-a}{2k}$$

a tiež

$$0 \leq S(f, D_{2k-1}) - \mathscr{S}(f, D_{2k-1}, \Xi_{2k-1}) = \sum_{i=1}^{l_{2k-1}} (M_{i,2k-1} - f(\xi_{i,2k-1}))\Delta x_{i,2k-1} < \frac{b-a}{2k-1}.$$

Keďže pre $k \to \infty$ podľa vety o zovretí obe strany konvergujú k 0, potom aj postupnosti uprostred konvergujú k 0. Keďže podľa predpokladu $\mathscr{S}(f, D_{2k}, \Xi_{2k}) \to I$ a $\mathscr{S}(f, D_{2k-1}, \Xi_{2k-1}) \to I$ pre $k \to \infty$, potom $s(f, D_{2k-1}) \to I$ a $S(f, D_{2k}) \to I$ a podľa limitného kritéria pre normálnu postupnosť delení $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $I = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Poznámka 3.36. Z praktickej stránky výpočtu integrálu je používanejšia časť (i). Ak totiž vieme, že ohraničená funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ (viac o takých funkciách v nasledujúcej kapitole), potom hodnotu $\mathscr{R}$-integrálu môžeme vypočítať ako špeciálnu limitu integrálnych súčtov pri ľubovoľne zvolenej normálnej postupnosti delení a ľubovoľnom výbere reprezentantov. Musíme však byť opatrní: *na to, aby sme $\mathscr{R}$-integrál mohli takto počítať, musíme mať integrovateľnosť funkcie vopred zaručenú!* Ak na to zabudneme, ľahko môžeme ukázať, že Dirichletova funkcia má na intervale $\langle 0, 1\rangle$ $\mathscr{R}$-integrál rovný 0, ako sa ľahko môže ukázať, že tento integrál je rovný 1.

Príklad 3.37. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$. Myšlienkou je vypočítať túto limitu pomocou integrálneho súčtu, a preto upravujeme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n^2}{4n^2}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{2n}\right)^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{2n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Ak si označíme $\xi_{i,n} = \frac{i}{2n}$ a $\Delta x_{i,n} = \frac{1}{2n}$, potom posledná limita nie je nič iné ako limita integrálneho súčtu prislúchajúceho funkcii $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, postupnosti delení $(D_n)_1^\infty$ deliacej interval $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ na n rovnakých častí (a teda $(D_n)_1^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$) a výberu reprezentantov $\xi_{i,n} \in \Xi_n$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{2n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2n} = (\mathscr{R}) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Hoci ešte nemáme zdôvodnený vzťah medzi $\mathscr{N}$-integrálom a $\mathscr{R}$-integrálom (pozri Vetu 3.77), na výpočet uvedeného integrálu použijeme $\mathscr{N}$-integrál, čím dostávame

$$(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Preto aj $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right) = \frac{\pi}{6}.$

Premyslite si dôkaz nasledujúceho tvrdenia (a jeho súvis s oscilačnými kritériami Tvrdenia 3.28), ktoré završuje otázku zavedenia $\mathscr{R}$-integrálu.

Tvrdenie 3.38. *Ak $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia, potom nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I \in \mathbb{R}$;

(ii) pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ a pre každý výber reprezentantov Ξ_n delení D_n je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = I$;

(iii) existuje normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ taká, že pre každý výber reprezentantov Ξ_n delení D_n platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = I$;

(iv) existuje (nie nutne normálna) postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ taká, že pre každý výber reprezentantov Ξ_n delení D_n platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = I$.

Poznámka 3.39. Ako sme v tejto a predchádzajúcich častiach ukázali, $\mathscr{R}$-integrál sa dá zaviesť každým z nasledujúcich spôsobov:

(a) ako spoločná hodnota horného a dolného $\mathscr{R}$-integrálu (Darbouxova konštrukcia horných a dolných súčtov);

(b) ako limita horných a dolných Darbouxových súčtov pre ľubovoľnú postupnosť delení;

(c) ako limita horných a dolných Darbouxových súčtov pre normálnu postupnosť delení;

(d) ako špeciálna limita integrálnych súčtov, resp. Riemannova-Cauchyho definícia integrálu.

Z príkladu Dirichletovej funkcie je zrejmé, že predpoklad ohraničenosti, s ktorým pracujeme od začiatku našich úvah, nie je postačujúcou podmienkou k $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie. Nasledujúca veta ale hovorí, že je nutnou podmienkou, kde v dôkaze využijeme práve Riemannovu-Cauchyho definíciu integrálu. Toto tvrdenie sa nám neskôr bude hodiť v dôkaze fundamentálnej vety integrálneho kalkulu, viď Veta 3.71.

Veta 3.40. *Ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom f je ohraničená na $\langle a,b\rangle$.*

Dôkaz. Nech $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a označme $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$. Predpokladajme, že f nie je ohraničená na $\langle a,b\rangle$, t.j. pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $z_n \in \langle a,b\rangle$ také, že $|f(z_n)| > n$. Keďže $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená postupnosť, podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety sa z nej dá vybrať konvergentná podpostupnosť konvergujúca k bodu $x' \in \langle a,b\rangle$. Z $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie f na $\langle a,b\rangle$ zoberme $\varepsilon = 1$, k nemu zodpovedajúce $\delta > 0$ a uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$ také, že x' je vnútorným bodom niektorého z čiastočných intervalov I_{i_0}, pokiaľ x' nie je koncovým bodom $\langle a,b\rangle$ (v opačnom prípade bežia ďalšie argumenty rovnako pre $I_{i_0} = I_1$ alebo I_n). Keďže čiastočný interval I_{i_0} obsahuje nekonečne veľa bodov z_n, zoberme ľubovoľný výber reprezentantov $\xi_i \in \Xi$ pre $i \neq i_0$ a $\xi_{i_0} = z_N$, $N \in \mathbb{N}$. Potom $|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - I| < 1$. Následne zoberme iný výber reprezentantov Ξ' z delenia D taký, že $\xi'_{i_0} = z_M$, $M \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi') - I = \mathscr{S}(f, D, \Xi) - I + (f(z_M) - f(z_N))\Delta x_{i_0}.$$

Keďže f nie je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, môžeme zobrať M a N také, že $|f(z_M) - f(z_N)|\Delta x_{i_0} > 2$. Ak $f(z_M) - f(z_N) > 0$, potom

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi') - I = \mathscr{S}(f, D, \Xi) - I + (f(z_M) - f(z_N))\Delta x_{i_0} > -1 + 2 = 1,$$

čo je v spore s $\mathscr{R}$-integrovateľnosťou funkcie f. Analogicky pre $f(z_M) - f(z_N) < 0$ dostávame spor, a teda $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia f na $\langle a, b\rangle$ musí byť ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. □

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Kedy hodnota integrálneho súčtu nezávisí od voľby reprezentantov?

◇ Môžeme vo Vete 3.35, resp. Tvrdení 3.38 nahradiť výraz *„pre každý výber reprezentantov“* výrazom *„existuje výber reprezentantov“*?

◇ Pomocou integrálnych súčtov vypočítajte nasledujúce limity:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\ln \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} + \ln \sqrt[n]{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \ln \sqrt[n]{1 + \frac{n}{n}}\right)$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$.

3.3 Triedy $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií

Cieľom tejto časti je poskytnúť niekoľko postačujúcich podmienok $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie, presnejšie uviesť niekoľko veľkých tried $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií.

Veta 3.41 (o triedach $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií). *Funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ v každom z nasledujúcich prípadov:*

(i) f je monotónna na $\langle a, b\rangle$;

(ii) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$.

Dôkaz. (i) Predpokladajme, že f je neklesajúca na $\langle a, b\rangle$, t.j. pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, teda f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$ (prípad nerastúcej funkcie sa dokáže analogicky). Ak $f(a) = f(b)$, potom f je konštantná na $\langle a, b\rangle$, a teda $\mathscr{R}$-integrovateľná (viď Príklad 3.7). Nech teda $f(a) \neq f(b)$.

Zoberme ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a uvažujme delenie $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$ (ukážeme aké bude δ). Potom z neklesajúcosti f na $\langle a, b\rangle$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $m_i = f(x_{i-1})$ a $M_i = f(x_i)$, a teda

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \\ &< \delta\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Aby sme zabezpečili, že tento rozdiel horného a dolného Darbouxovho súčtu je menší ako ε, položme $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Potom z Du Bois-Reymondovho–Darbouxovho kritéria je $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

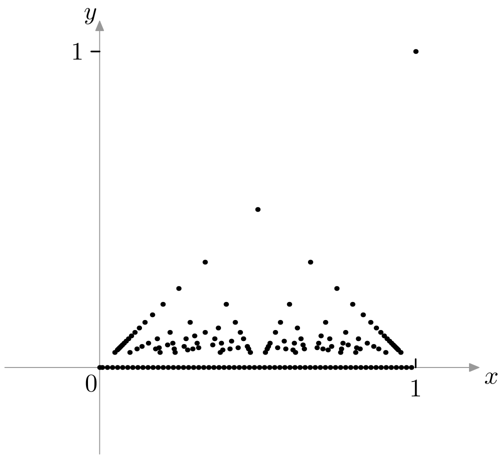
(ii) Keďže $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom z Heineho-Cantorovej vety je f rovnomerne spojitá na $\langle a, b\rangle$, t.j. ku každému $\varepsilon_1 > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ také, že $|x_1 - x_2| < \delta$ je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1$. Nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ s normou $\nu(D) < \delta$. Podľa Weierstrassovej vety o maxime a minime na každom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, existujú $c_i, d_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ také, že $f(c_i) = m_i$ a $f(d_i) = M_i$. Keďže $|c_i - d_i| < \delta$, tak z rovnomernej spojitosti je $|f(c_i) - f(d_i)| < \varepsilon_1$. Potom

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(d_i) - f(c_i))\Delta x_i \\ &< \varepsilon_1\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon_1(b - a). \end{aligned}$$

Ak teda položíme $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{b-a}$, potom podľa Du Bois-Reymondovho–Darbouxovho kritéria je $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. □

Z vety vyplýva, že „slušné funkcie“ sú $\mathscr{R}$-integrovateľné. Konkrétne spojitosť a monotónnosť sú postačujúcimi podmienkami $\mathscr{R}$-integrovateľnosti. Ukážte, že nie sú nutnou podmienkou (nájdite kontrapríklad!). V súvislosti so spojitosťou si stačí uvedomiť, že Riemann zavádzal svoj integrál tak, aby spojitosť nebola potrebná, preto sa teraz budeme snažiť tento predpoklad spojitosti zoslabiť. Stále máme na pamäti otázku, ktorú si kládol Riemann: *Ako zlá môže byť $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia?*

Ako sme už spomenuli, Riemann vo svojej definícii nijak nešpecifikoval funkcie, pre ktoré svoj integrál definoval. Hovorí iba o funkciách, ktoré pripúšťajú integráciu, teda povedané v dnešnej terminológii o *integrovateľných funkciách.* Zavádza tak novú triedu funkcií, ktorú je vhodné a účelné skúmať. Sám k tomu hovorí toto: „Po tom, čo sme vyšetrili podmienky existencie určitého integrálu vo všeobecnosti, t.j. bez zvláštnych predpokladov o povahe integrovanej funkcie, bude toto vyšetrovanie sčasti použité v špecifických prípadoch, sčasti ďalej rozvinuté pre funkcie, ktoré sú medzi dvoma akokoľvek blízkymi hranicami (bodmi) nekonečne často nespojité.“ Potom konštruuje funkciu definovanú v intervale $\langle 0, 1\rangle$, ktorá má nekonečnú množinu bodov nespojitosti M, pričom táto množina má vlastnosť, že v každom podintervale intervalu $\langle 0, 1\rangle$ existuje aspoň jeden bod z M (takáto množina M sa nazýva *hustá v* $\langle 0, 1\rangle$).



Obr. 3.9: Riemannova funkcia

Príklad 3.42. (Riemannova funkcia) Nech

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle \text{ alebo } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ je zlomok v základnom tvare } (p, q \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné}) \end{cases}.$$

Graf tejto funkcie je načrtnutý na Obr. 3.9. Zrejme, ρ je ohraničená na $\langle 0, 1\rangle$. Ukážeme, že ρ je nespojitá v každom racionálnom čísle. Naozaj, ak x_0 je racionálne číslo, potom existuje postupnosť iracionálnych čísel $(x_n)_1^\infty$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Keďže $\rho(x_0) = \frac{1}{q} > 0$ a $\rho(x_n) = 0$ pre $n = 1, 2, \dots$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$, a teda $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) \neq \rho(x_0)$.

Riemannova funkcia ρ je spojitá v každom iracionálnom čísle. Ak x_0 je iracionálne číslo, tak $\rho(x_0) = 0$. Nech $\varepsilon > 0$. Podľa Archimedovej vlastnosti k nemu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Keďže racionálnych čísel tvaru $\frac{p}{q}$ (p, q nesúdeliteľné, kde $q > n_0$) je len konečne mnoho, existuje $\delta > 0$ také, že interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ neobsahuje žiadne také číslo. Teda pre $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme buď $\rho(x) = 0$ pre x iracionálne, alebo $\rho(x) = \frac{1}{q} < \frac{1}{n_0}$ pre x racionálne. Teda pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|\rho(x) - \rho(x_0)| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Ukážeme, že ρ je $\mathscr{R}$-integrovateľná. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ zvoľme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Nech k je počet tých racionálnych čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $q \leq N$. Zoberme delenie $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$ také, že $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Označme

$$A = \left\{ i \in \{1, \dots, n\};\ t_i = \frac{p}{q},\ q \leq N \right\} \quad \text{a} \quad B = \{i \in \{1, \dots, n\}\} \setminus A.$$

Potom

$$S(\rho, D) = \sum_{i\in A} \rho(t_i)\Delta x_i + \sum_{i\in B} \rho(t_i)\Delta x_i.$$

Keďže množina A obsahuje najviac k bodov a norma delenia je menšia ako $\frac{\varepsilon}{2k}$, dostaneme $\sum_{i\in A} \rho(t_i)\Delta x_i < k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}$. Pre $i \in B$ je $\rho(t_i) < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, teda platí

$\sum_{i\in B}\rho(t_i)\Delta x_i < \frac{1}{N}\sum_{i\in B}\Delta x_i < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Keďže v oboch sumách sú nezáporné sčítance a $s(\rho, D) = 0$, potom

$$S(\rho, D) - s(\rho, D) = \sum_{i\in A}\rho(t_i)\Delta x_i + \sum_{i\in B}\rho(t_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čo podľa Darbouxovho kritéria dokazuje, že $\rho \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$. Ukážte, že $(\mathscr{R})\int_0^1 \rho(x)\,\mathrm{d}x = 0$!

Poznámka 3.43. Pomocou Riemannovej funkcie skonštruoval Hankel[5] roku 1871 spojitú funkciu, ktorá nemá deriváciu v nekonečne veľa bodoch. O rok neskôr Weierstrass všetkých šokoval príkladom spojitej nikde diferencovateľnej funkcie.

Ak teda vieme, že aj niektoré „dosť zlé“ funkcie sú $\mathscr{R}$-integrovateľné, otázkou by mohlo byť, či ich nedokážeme nejakým spôsobom popísať. Nepodáme síce ich úplnú charakterizáciu (viď Lebesgueova veta v Poznámke 3.51), ale nasledujúci aparát z teórie miery nám poslúži k uspokojivej predstave o triede $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií.

Definícia 3.44. Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ *má Jordanovu*[6] *mieru nula*, akk

(i) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $J_1, \dots, J_n$ takých, že súčet ich dĺžok je menší ako ε;

(ii) pre každé $x \in M$ existuje J_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ taký, že x je vnútorný bod J_j.

Poznamenajme, že názov pochádza zo všeobecnej teórie teórie miery a integrálu, v ktorej sa takéto „malé“ množiny zanedbávajú. Začiatky jej budovania siahajú do konca 19. storočia (Jordan publikoval svoje pojednanie o miere v roku 1892). Pozrime sa na niekoľko príkladov takýchto množín. V nasledujúcom označme ΔJ dĺžku intervalu J.

Príklad 3.45. 1.) Každá konečná množina má Jordanovu mieru nula, t.j. ak $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí zvoliť intervaly $J_j = \langle x_j - \frac{\varepsilon}{3n}, x_j + \frac{\varepsilon}{3n}\rangle$, pretože každý prvok $x_j \in M$ je vnútorným bodom intervalu J_j a platí

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta J_j = n \cdot \frac{2\varepsilon}{3n} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

2.) Nech $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, čiže M je množina členov postupnosti $(\frac{1}{n})_1^\infty$. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\frac{1}{n} \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Ľahko vidieť, že intervaly $J_0 = \langle 0, \frac{\varepsilon}{2}\rangle$, $J_1 = \langle 1 - \frac{\varepsilon}{5n_0}, 1 + \frac{\varepsilon}{5n_0}\rangle$, $J_2 = \langle \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{5n_0}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{5n_0}\rangle, \dots, J_{n_0} = \langle \frac{1}{n_0} - \frac{\varepsilon}{5n_0}, \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{5n_0}\rangle$ spĺňajú požiadavku definície, a teda M má Jordanovu mieru nula.

Poznámka 3.46. Na základe predchádzajúceho príkladu by sa mohlo zdať, že každá spočítateľná množina má Jordanovu mieru nula, čo však neplatí (viď úlohy na precvičenie). Na druhej strane existujú aj nespočítateľné množiny, ktoré majú Jordanovu mieru nula (napr. Cantorova množina).

[5] Hermann Hankel (1839–1873)
[6] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), čítaj „Džorden“

Veta 3.47. *Ak* $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ *s výnimkou množiny bodov Jordanovej miery nula, tak* $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Dôkaz. Keďže množina bodov nespojitosti funkcie f na $\langle a, b\rangle$ má Jordanovu mieru nula, tak ku každému $\varepsilon_1 > 0$ existuje konečný počet uzavretých intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_n$ takých, že $\sum_{i=1}^{n} \Delta I_i < \varepsilon_1$ a každý bod nespojitosti je vnútorným bodom aspoň jedného z nich. Bez ujmy na všeobecnosti nech sa intervaly I_i neprekrývajú. Zostrojme $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ také, že $I_1, \ldots, I_n$ sú čiastočné intervaly delenia D a zvyšné intervaly tohto delenia označme $J_1, \ldots, J_m$. Položme $M_j = \sup_{x \in J_j} f(x)$, $m_j = \inf_{x \in J_j} f(x)$, $M_i' = \sup_{x \in I_i} f(x)$ a $m_i' = \inf_{x \in I_i} f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Počet intervalov $J_1, \ldots, J_m$ môžeme zväčšiť tak, aby dĺžka každého z nich bola menšia ako zvolené $\delta > 0$. Keďže f je spojitá na každom intervale J_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, podľa Heineho-Cantorovej vety je f rovnomerne spojitá na každom J_j, a teda je rovnomerne spojitá aj na $\bigcup_{j=1}^{m} J_j$, t.j. pre ľubovoľné $\varepsilon_2 > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x_1, x_2 \in \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ také, že $|x_1 - x_2| < \delta$ je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_2$. Taktiež z Weierstrassovej vety o maxime a minime pre funkciu f na J_j existujú $u_j, v_j \in J_j$ také, že $f(u_j) = M_j$ a $f(v_j) = m_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Keďže $|u_j - v_j| < \delta$, tak z rovnomernej spojitosti $|M_j - m_j| < \varepsilon_2$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, m$. Chceme teraz vypočítať $S(f, D) - s(f, D)$. Urobíme to tak, že ho rozdelíme na dve časti: na tú, kde sa vyskytujú intervaly I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ a tú, kde sa vyskytujú intervaly J_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom

$$
\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i') \Delta I_i + \sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j) \Delta J_j \\
&\leq 2M \sum_{i=1}^{n} \Delta I_i + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{m} \Delta J_j < 2M\varepsilon_1 + \varepsilon_2 (b - a),
\end{aligned}
$$

pretože $|M_i' - m_i'| \leq |M_i'| + |m_i'| \leq M + M = 2M$, kde $M = \sup_{x \in \langle a, b\rangle} |f(x)|$. Ak teraz položíme $\varepsilon = 2M\varepsilon_1 + \varepsilon_2(b - a)$, potom podľa Darbouxovho kritéria je $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. $\square$

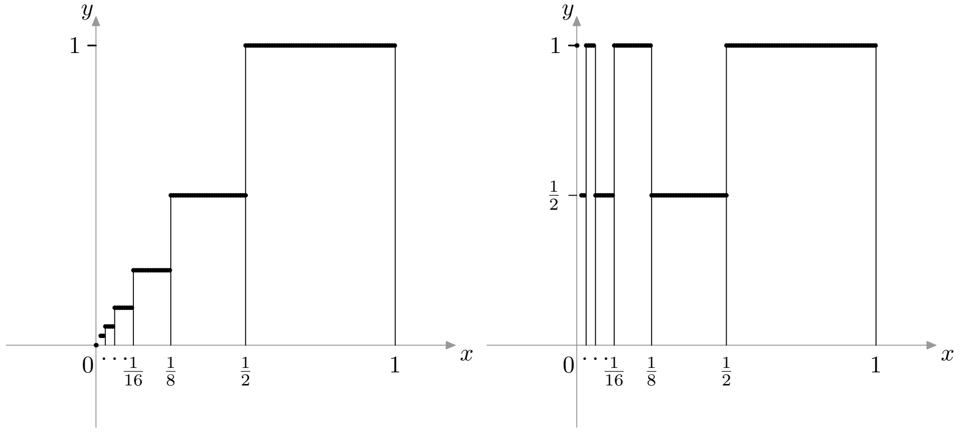
Dôkaz vety by mal byť intuitívne zrejmý z toho, že ak množina bodov nespojitosti spojitej funkcie na $\langle a, b\rangle$ má Jordanovu mieru nula, tak $\langle a, b\rangle$ sa dá rozdeliť v týchto bodoch na uzavreté intervaly, na ktorých je funkcia spojitá. Potom z geometrickej interpretácie $\mathscr{R}$-integrálu by mal byť tento integrál rovný súčtu integrálov na týchto intervaloch (tzv. aditivita $\mathscr{R}$-integrálu, viď Vetu 3.61).

Na základe Príkladu 3.45 vieme, že každá konečná množina a každá množina členov konvergentnej postupnosti majú Jordanovu mieru nula, a teda dostávame nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 3.48. (i) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečnej množiny bodov, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

(ii) Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a postupnosť bodov nespojitosti funkcie f je konvergentná v $\langle a, b\rangle$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Poznámka 3.49. V dôkaze Vety 3.47 sme významne využívali vlastnosť spojitosti funkcie. Všimnime si, že dôkaz bežal veľmi podobne ako vo Vete 3.41 (ii). Vlastne,



Obr. 3.10: Graf funkcie g a funkcie h z Príkladu 3.50

z Dôsledku 3.48 priamo plynie, že každá spojitá funkcia (t.j. množina bodov jej nespojitosti je prázdna) je $\mathscr{R}$-integrovateľná. Vzhľadom na Riemannovu myšlienku nahradiť spojitosť ohraničenosťou by mohla otázka znieť, či sa dá táto vlastnosť (spojitosť) zoslabiť. Dá sa ukázať, my to však robiť nebudeme, že Veta 3.47 a Dôsledok 3.48 platia aj v prípade, ak spojitosť nahradíme ohraničenosťou.

Príklad 3.50. 1.) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na ľubovoľnom intervale $\langle a, b\rangle$, pretože množina bodov nespojitosti je jednoprvková (alebo prázdna), a teda je Jordanovej miery nula. Výpočet $\mathscr{R}$-integrálu sme urobili v Príklade 3.15.

$$2.)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

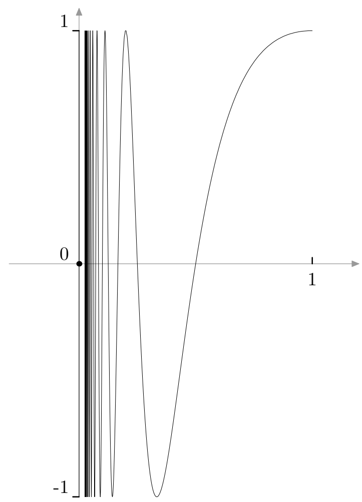
Keďže g je neklesajúca na $\langle 0, 1\rangle$, podľa Vety 3.41 je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle 0, 1\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ (zdôvodnite!).

$$3.)\ h(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2^{2k-1}} \le x < \frac{1}{2^{2k-2}} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2^{2k}} \le x < \frac{1}{2^{2k-1}} \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \ k \in \mathbb{N},$$

viď Obr. 3.10. Množina bodov nespojitosti $M = \{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ má Jordanovu mieru nula, teda podľa Vety 3.47 je $h \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$ (vypočítajte $(\mathscr{R}) \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$!).

Poznámka 3.51. Tvrdenie Vety 3.47 sa dá formulovať aj všeobecnejšie, avšak vyžaduje si to hlbšie poznatky z teórie miery a integrálu, a preto to robiť nebudeme. Spomeňme len, že zovšeobecnené tvrdenie (tzv. LEBESGUEOVA VETA) hovorí o tom, že *ohraničená funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná práve vtedy, keď je skoro všade spojitá (t.j. množina bodov nespojitosti má Lebesgueovu mieru nula).* My spomenieme ešte nasledujúce zaujímavé tvrdenie, ktorého dôkaz robiť nebudeme, viď [9].

Dôsledok 3.52. Ak f, g sú ohraničené na $\langle a, b\rangle$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle \setminus M$, kde $M \subset \langle a, b\rangle$ je množina Jordanovej miery nula, potom buď $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alebo ani jedna z funkcií nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$.



Obr. 3.11: Graf funkcie $h(x) = \sin \frac{\pi}{2x}$ z Príkladu 3.54

Poznámka 3.53. Podľa tohto výsledku každú funkciu $f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, môžeme nahradiť inou funkciou, ktorá sa na $\langle a, b\rangle$ zhoduje s f s výnimkou množiny Jordanovej miery nula bez toho, aby bola narušená $\mathscr{R}$-integrovateľnosť aj hodnota $\mathscr{R}$-integrálu. Tieto úvahy vedú k tomu, aby sme zaviedli integrál aj z niektorých takých funkcií, ktoré nie sú definované v každom bode intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak f je taká ohraničená funkcia, že k nej existuje funkcia $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, pre ktorú $f(x) = g(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$ s výnimkou množiny s Jordanovou mierou nula, definujeme $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Príklad 3.54. 1.) Nech $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, 1\rangle \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \\ 1, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$. Vieme, že množina $M = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots\}$ má Jordanovu mieru nula. Keďže pre každé $x \notin M$ je $f(x) = 0$ a konštantná funkcia $g(x) = 0$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle 0, 1\rangle$, potom $f \in \mathscr{R}\langle 0, 1\rangle$ a platí $(\mathscr{R}) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2.) Nech $g(x) = \sin \frac{\pi}{2x}$ a $\langle a, b\rangle$ je ľubovoľný interval obsahujúci bod $x_0 = 0$. Chceme vyšetriť $\mathscr{R}$-integrovateľnosť tejto funkcie. Keďže g nie je definovaná v bode $x_0 = 0$, položme $h(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, viď Obr. 3.11. Pretože h je spojitá všade okrem bodu $x_0 = 0$, je ohraničená na ľubovoľnom intervale $\langle a, b\rangle$, potom $h \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Keďže $g(x) = h(x)$ pre každé $x \neq 0$, potom $(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Má množina $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ Jordanovu mieru nula?

◇ Existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v bode a taká, aby nebola $\mathscr{R}$-integrovateľná na žiadnom uzavretom a ohraničenom intervale obsahujúcom bod a?

◇ Dokážte, že $f \notin \mathscr{R}\langle 0,1\rangle$, ak

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in \mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle \\ 1-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle \end{cases}.$$

3.4 Základné vlastnosti $\mathscr{R}$-integrálu

Veta 3.55 (o linearite $\mathscr{R}$-integrálu). *Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$. Potom aj cf, $f+g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a platí $(\mathscr{R})\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dôkaz. Nech $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$. Zoberme ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$. Nech pre $n \in \mathbb{N}$ je $D_n\{x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{l_n,n}\}$ a pre $i = 1,2,\dots,l_n$ je $\xi_{i,n} \in \Xi_n$ i-ty reprezentant čiastočného intervalu delenia D_n. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\mathscr{S}(cf, D_n, \Xi_n) = \sum_{i=1}^{l_n} (cf)(\xi_{i,n})\Delta x_{i,n} = c\sum_{i=1}^{l_n} f(\xi_{i,n})\Delta x_{i,n} = c \cdot \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$$

a limitným prechodom $n \to \infty$ dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(cf, D_n, \Xi_n) = c \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = c \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Keďže táto rovnosť platí pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení a ľubovoľný výber reprezentantov, podľa Vety 3.35 je $cf \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a platí $(\mathscr{R})\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(cf, D_n, \Xi_n) = c \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom $\mathscr{S}(f+g, D_n, \Xi_n) = \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) + \mathscr{S}(g, D_n, \Xi_n)$. Opäť limitným prechodom $n \to \infty$ dostávame

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f+g, D_n, \Xi_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) + \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(g, D_n, \Xi_n) \\ &= (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Podľa Vety 3.35 je $f+g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a platí $(\mathscr{R})\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

Poznámka 3.56. Tvrdenie Vety o linearite $\mathscr{R}$-integrálu môžeme matematickou indukciou rozšíriť na konečný počet funkcií (urobte to!), t.j. ak $f_i \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,n$, potom $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} (c_i f_i)(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 3.57 (o monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu). *Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.*

(i) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq 0$, potom $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$, potom $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz. (i) Nech f je nezáporná $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$ a zoberme normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$. Nech pre $n \in \mathbb{N}$ je $D_n = \{x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{l_n,n}\}$ a pre $i = 1, 2, \ldots, l_n$ je $\xi_{i,n} \in \Xi_n$ i-ty reprezentant čiastočného intervalu delenia D_n. Potom $\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) \geq 0$ a limitným prechodom $n \to \infty$ dostávame $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) \geq 0$.

(ii) Ak pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \geq g(x)$, potom $h(x) = f(x) - g(x)$ je nezáporná a $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia na $\langle a, b\rangle$. Potom podľa Vety o linearite a časti (i) je

$$(\mathscr{R}) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

z čoho plynie tvrdenie vety. □

Dôsledok 3.58. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $k \leq f(x) \leq K$, potom $k(b-a) \leq (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K(b-a)$.

Dôkaz. Plynie priamo z monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu a $\mathscr{R}$-integrovateľnosti konštantnej funkcie na $\langle a, b\rangle$. □

Príklad 3.59. Dokážte, že $(\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^3}{2-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\ln 2$. Keďže pre $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $\sin x \leq x$, tak $\sin^4 x \leq x^4$, a teda $\frac{x^3}{2-\sin^4 x} \leq \frac{x^3}{2-x^4}$. Podľa Dôsledku 3.58 máme

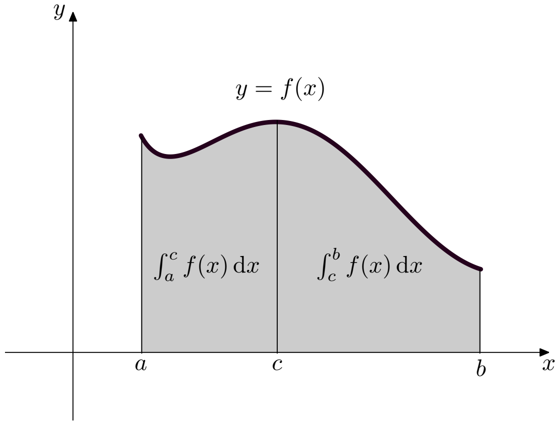
$$\begin{aligned}(\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^3}{2-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x &\leq (\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^3}{2-x^4}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_0^1 \frac{x^3}{2-x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\mathscr{N}) \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}[\ln t]_1^2 = \frac{1}{4}\ln 2,\end{aligned}$$

kde na výpočet daného $\mathscr{R}$-integrálu sme využili substitúciu $2 - x^4 = t$ pre $\mathscr{N}$-integrál (o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu a oprávnenosti tohto výpočtu, viď Vetu 3.77).

Príklad 3.60. Dokážte, že $\frac{3}{\sqrt{34}} \leq (\mathscr{R}) \int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x^5}} \leq 3$. Keďže $f(x) = \sqrt{2+x^5}$ je rastúca na $\langle -2, 1\rangle$, tak $1 \leq \sqrt{2+x^5} \leq \sqrt{34}$, z čoho máme $1 \geq \frac{1}{\sqrt{2+x^5}} \geq \frac{1}{\sqrt{34}}$. Podľa Dôsledku 3.58 a máme

$$\frac{3}{\sqrt{34}} = (\mathscr{R}) \int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{34}}\,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{R}) \int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x^5}} \leq (\mathscr{R}) \int_{-1}^2 \mathrm{d}x = 3.$$

Nasledujúca vlastnosť $\mathscr{R}$-integrálu sa často považuje za samozrejmú, avšak táto samozrejmosť nie je vôbec namieste. Z našej intuitívnej predstavy obsahu pod grafom funkcie takýto výsledok od nášho integrálu prirodzene očakávame, ako to vidieť na Obr. 3.12. Preto teraz túto dôležitú vlastnosť $\mathscr{R}$-integrálu dokážeme, čo ho opäť priblíži k $\mathscr{N}$-integrálu zavedenému v Kapitole 2.



Obr. 3.12: Aditivita $\mathscr{R}$-integrálu – geometrická predstava

Veta 3.61 (o aditivite $\mathscr{R}$-integrálu). *Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$. Potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. Naviac platí*

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. $\Rightarrow$ Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, potom podľa Darbouxovho kritéria pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ (nech $D = \{x_0, x_1, \dots, c, \dots, x_n\}$ bez ujmy na všeobecnosti) také, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Označme D_1 tie čiastočné intervaly, ktoré ležia v $\langle a, c\rangle$ a D_2 tie čiastočné intervaly, ktoré ležia v $\langle c, b\rangle$. Teda $D_1 \in \mathscr{D}\langle a, c\rangle$ a $D_2 \in \mathscr{D}\langle c, b\rangle$. Keďže $D \subseteq D_1$ a $D \subseteq D_2$, potom $S(f, D_1) - s(f, D_1) \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$ a $S(f, D_2) - s(f, D_2) \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$, teda podľa Darbouxovho kritéria $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$.

$\Leftarrow$ Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $D_1 \in \mathscr{D}\langle a, c\rangle$ také, že $S(f, D_1) - s(f, D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ a existuje $D_2 \in \mathscr{D}\langle c, b\rangle$ také, že $S(f, D_2) - s(f, D_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $D = D_1 \cup D_2 \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a platí

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= S(f, D_1) + S(f, D_2) - (s(f, D_1) + s(f, D_2)) \\ &= (S(f, D_1) - s(f, D_1)) + (S(f, D_2) - s(f, D_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

teda podľa Darbouxovho kritéria $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$.

Ďalej nech $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je také delenie, ktorého deliacim bodom je bod c. Potom pre $D_1 \in \mathscr{D}\langle a, c\rangle$ a $D_2 \in \mathscr{D}\langle c, b\rangle$ platí

$$\begin{aligned} S(f, D) = S(f, D_1) + S(f, D_2) &\geq \inf_{D_1 \in \mathscr{D}\langle a, c\rangle} S(f, D_1) + \inf_{D_2 \in \mathscr{D}\langle c, b\rangle} S(f, D_2) \\ &= (\mathscr{R}) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R}) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kde posledná rovnosť plynie z faktu, že $f \in \mathscr{R}\langle a, c\rangle$ a $f \in \mathscr{R}\langle c, b\rangle$. To ale znamená, že množina horných Darbouxových súčtov prislúchajúcich funkcii f a $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je zdola ohraničená číslom $(\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak teraz zoberiem infimum z oboch strán cez všetky $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, tak

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D\in\mathscr{D}\langle a,b\rangle} S(f,D) \geq (\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analogicky to urobíme pre dolné Darbouxove súčty, čo povedie k nerovnosti $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, teda rovnosť je dokázaná. □

Poznámka 3.62. Opäť vieme pomocou matematickej indukcie rozšíriť platnosť vety pre konečný počet intervalov (urobte to!), t.j. ak $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, tak $f \in \mathscr{R}\langle\alpha_1,\alpha_n\rangle$ práve vtedy, keď $f \in \mathscr{R}\langle\alpha_{i-1},\alpha_i\rangle$, $i = 1,2,\dots,n$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_{\alpha_1}^{\alpha_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=2}^{n}(\mathscr{R})\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vieme, že novú funkciu môžeme získať z daných funkcií nielen pomocou operácií sčítania a násobenia skalárom. O ďalších operáciách a ich vzťahu k integrovateľnosti bude hovoriť nasledujúca veta a jej dôsledky.

Veta 3.63. *Ak $f : \langle a,b\rangle \to \langle\alpha,\beta\rangle$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a,b\rangle$ a $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$, potom $\varphi\circ f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$.*

Dôkaz. V prvom rade je potrebné si uvedomiť, že $\varphi\circ f$ je ohraničená, takže budeme môcť uvažovať horné a dolné Darbouxove súčty pre funkciu $\varphi\circ f$. Ak $\alpha=\beta$, tak f je konštantná a veta platí triviálne. Podobne, ak $\varphi\circ f$ je konštantná, tiež nemáme čo dokazovať. Preto predpokladajme, že $\alpha<\beta$ a $\varphi\circ f$ je nekonštantná.

Ak φ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$, tak je rovnomerne spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$, t.j. ku každému $\varepsilon_1 > 0$ existuje $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon_1$ také, že pre každé $t_1,t_2 \in \langle\alpha,\beta\rangle$ také, že $|t_1-t_2| < \delta$, je $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| < \varepsilon_1$. Keďže $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, tak podľa Darbouxovho kritéria ku každému $\eta > 0$, teda aj $\eta = \delta^2$, existuje $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$, $D = \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ také, že $S(f,D) - s(f,D) < \delta^2$. Pre $i = 1,2,\dots,n$ označme

$$m_i = \inf_{x\in I_i} f(x),\quad M_i = \sup_{x\in I_i} f(x),\quad m_i^* = \inf_{x\in I_i}(\varphi\circ f)(x),\quad M_i^* = \sup_{x\in I_i}(\varphi\circ f)(x)$$

a uvažujme nasledujúce množiny indexov

$$A = \{i \in \{1,2,\dots,n\};\ M_i - m_i < \delta\},\qquad B = \{i \in \{1,2,\dots,n\};\ M_i - m_i \geq \delta\}.$$

Potom pre $i \in A$ z rovnomernej spojitosti vyplýva, že $M_i^* - m_i^* < \varepsilon_1$ a pre $i \in B$ platí $M_i^* - m_i^* < 2K$, kde $K = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|(\varphi\circ f)(x)|$. Taktiež

$$\delta^2 > S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i \geq \delta\sum_{i\in B}\Delta x_i,$$

z čoho máme $\sum\limits_{i\in B} \Delta x_i < \delta$. Potom

$$\begin{aligned} S(\varphi\circ f, D) - s(\varphi\circ f, D) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\ &= \sum_{i\in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\ &< \varepsilon_1 \sum_{i\in A} \Delta x_i + 2K \sum_{i\in B} \Delta x_i < \varepsilon_1 (b-a) + 2K\delta \\ &< \varepsilon_1 (b-a+2K). \end{aligned}$$

Ak zoberieme $\varepsilon = \varepsilon_1(b-a+2K)$, tak podľa Darbouxovho kritéria $\varphi\circ f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$. $\square$

Príklad 3.64. Kompozícia dvoch $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií nemusí byť $\mathscr{R}$-integrovateľná, teda podmienka spojitosti vonkajšej zložky sa z vety nedá vypustiť. Ak napríklad $f(x) = \rho(x)$ (Riemannova funkcia) a $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\langle 0,1\rangle$, tak obe sú $\mathscr{R}$-integrovateľné funkcie na $\langle 0,1\rangle$, ale $(\varphi\circ f)(x) = \chi(x)$ (Dirichletova funkcia), ktorá nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná, viď Príklad 3.7. To znamená, že $\mathscr{R}$-integrovateľnosť zloženej funkcie môže pokaziť už jeden bod nespojitosti vonkajšej zložky!

Dôsledok 3.65. Nech $f, g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$. Potom

(i) $|f| \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a platí $\left|(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le (\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$;

(ii) $f\cdot g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$;

(iii) ak pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ je $g(x) > 0$ alebo $g(x) < 0$ a $\inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} g(x) \ne 0$, $\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} g(x) \ne 0$, tak $\frac{f}{g} \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$.

Dôkaz. (i) Keďže $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a $\varphi(t) = |t|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, z Vety 3.63 máme, že $\varphi\circ f = |f| \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$. Druhá časť vyplýva z nerovnosti $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ a Vety 3.57, t.j. $-(\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $\left|(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le (\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(ii) Keďže $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - (f^2+g^2)]$, stačí ukázať, že $f^2 \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, čo však vyplýva z Vety 3.63 pre $\varphi(t) = t^2$.

(iii) Predpokladajme, že $g(x) > 0$ pre $x \in \langle a,b\rangle$ a nech $m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} g(x)$, $M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} g(x)$. Keďže $m, M > 0$, uvažujme funkciu $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ na $\langle m,M\rangle$. Potom z Vety 3.63 vyplýva, že $\varphi\circ g = \frac{1}{g} \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a keďže $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$, z časti (ii) plynie tvrdenie. $\square$

Poznámka 3.66. Nerovnosť $\left|(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le (\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ sa obvykle označuje ako *trojuholníková nerovnosť*. Ak ju aplikujeme na súčin funkcií $f, g \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a využijeme vlastnosť $|f(x)g(x)| \le M\cdot|g(x)|$, kde $M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$, potom dostaneme užitočný odhad

$$(\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \le M\cdot(\mathscr{R}) \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Vo všeobecnosti neexistuje rozumný vzťah medzi $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $(\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Čoskoro totiž budeme schopní zistiť, že $(\mathscr{R})\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$, ale $(\mathscr{R})\int_0^1 2x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}-4$, čo je transcendentné číslo.

Príklad 3.67. Dokážte, že $\left|(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\pi^2}{16}$. Podľa trojuholníkovej nerovnosti

$$\left|(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\right| \leq (\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

ale pre každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je $2+\cos x \geq 2$, a preto z monotónnosti $\mathscr{R}$-integrálu

$$(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16},$$

kde výpočet posledného $\mathscr{R}$-integrálu sme previedli na výpočet $\mathscr{N}$-integrálu.

Poznámka 3.68. Ak $|f| \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom nemusí platiť $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ (ako kontrapríklad môžeme uviesť funkciu $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\cap\langle 0,1\rangle \\ -1, & \text{inak} \end{cases}$ – zdôvodnite!).

Poznámka 3.69. Vzhľadom na linearitu $\mathscr{R}$-integrálu môžeme povedať, že $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ je *vektorový priestor* nad $\mathbb{R}$. Ak k tomu pridáme monotónnosť $\mathscr{R}$-integrálu, tak zobrazenie $A : f \mapsto (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, je *lineárny funkcionál* na vektorom priestore $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$. Keďže aj súčin dvoch $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií je z priestoru $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom priestor $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ je *algebra*.

Ďalšie rozšírenie pojmu $\mathscr{R}$-integrálu vychádza z nasledujúcej úvahy: V definícii a vlastnostiach integrálu $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ doteraz vždy bolo $a<b$, ako to vyplývalo z podstaty intervalu $\langle a,b\rangle$. Rozšírme tento pojem na ďalšie prípady.

Definícia 3.70. Ak f je definovaná v bode a, potom definujeme $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, potom

$$(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a<b.$$

Tieto definície sú korektné a prirodzené. V prvom prípade, t.j. ak $a=b$, uvážme, že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ sú čiastočné intervaly tohto delenia body (navzájom rovné) a ich dĺžky $\Delta x_i = 0$. Preto $S(f,D) = s(f,D) = \mathscr{S}(f,D,\Xi) = 0$, a preto je namieste rovnosť $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

V druhom prípade sa integrálny súčet pre $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ líši od integrálneho súčtu pre $(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ len opačným znamienkom, a preto aj limity týchto integrálnych súčtov sa líšia len opačnými znamienkami.

Platnosť celého radu viet odvodených v predchádzajúcich častiach sa dá bezprostredne vidieť (napr. Veta 3.55), bez obmedzenia $a<b$. Iné platia pre $a>b$ v menšej modifikácii, ktorú si čitateľ (aj menovateľ) v prípade potreby môže ľahko urobiť.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Ako je to s $\mathscr{R}$-integrovateľnosťou funkcie $\varphi \circ f$, ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$ a $\varphi \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$?

◇ Môže byť súčet (súčin) $\mathscr{R}$-integrovateľnej a ohraničenej nie $\mathscr{R}$-integrovateľnej funkcie $\mathscr{R}$-integrovateľný?

◇ Znázornite Vennov diagram pre nasledujúce triedy funkcií na $\langle a, b\rangle$: spojité, monotónne, ohraničené a $\mathscr{R}$-integrovateľné!

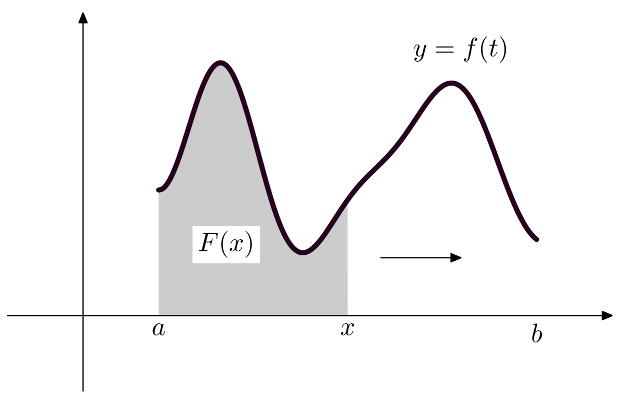
◇ Dokážte, že ak $|f| \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $(\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x = 0$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a platí $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = 0$!

◇ Dokážte, že ak $f, g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak $\max\{f, g\} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$!

◇ Dokážte, že $\frac{1}{2} \leq (\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{1+x^{30}}{2-x^{99}} \,\mathrm{d}x \leq 2$!

3.5 $\mathscr{R}$-integrál ako funkcia hornej medze

Ak funkcia f je ohraničená na $\langle a, b\rangle$, potom je ohraničená na každom podintervale $\langle a, x\rangle$ pre $x \in \langle a, b\rangle$. Ak naviac je táto funkcia $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a, b\rangle$, potom podľa Vety 3.61 je $\mathscr{R}$-integrovateľná aj na $\langle a, x\rangle$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Hodnota integrálu teda závisí od polohy bodu x v intervale $\langle a, b\rangle$ a podľa našich doposiaľ intuitívnych geometrických predstáv dáva aktuálnu hodnotu obsahu útvaru pod grafom funkcie f. To znamená, že uvedený integrál je funkciou premennej x, ktorá je definovaná na $\langle a, b\rangle$. Preto je prirodzené pýtať sa na vlastnosti takejto funkcie $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$, ktorú nazývame *funkciou hornej medze* (alebo funkciou svojej hornej hranice).



Veta 3.71 (fundamentálna veta integrálneho kalkulu). *Nech $a < b$, $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$, $x \in \langle a, b\rangle$. Potom*

(i) $F \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, kde v koncových bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ uvažujeme jednostrannú spojitosť;

(ii) ak f je spojitá v bode $x_0 \in \langle a, b\rangle$, potom F je diferencovateľná v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$, kde v koncových bodoch $\langle a, b\rangle$ rozumieme jednostrannú spojitosť v predpoklade a jednostrannú diferencovateľnosť v tvrdení.

Dôkaz. (i) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$, tak podľa Vety 3.40 existuje $L > 0$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leq L$. Potom pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ je

$$\begin{aligned}|F(x_1) - F(x_2)| &= \left|(\mathscr{R})\int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t - (\mathscr{R})\int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|(\mathscr{R})\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq (\mathscr{R})\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq L \cdot (\mathscr{R})\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t = L|x_1 - x_2| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ak teda položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, potom ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ také, že pre každé $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ také, že $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$, čo znamená, že F je rovnomerne spojitá na $\langle a, b\rangle$, a teda podľa Heineho-Cantorovej vety spojitá na $\langle a, b\rangle$.

(ii) Ak f je spojitá v bode $x_0 \in \langle a, b\rangle$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \langle a, b\rangle$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Uvažujme $x_0 \in (a, b)$, pre krajné body je postup analogický. Potom pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \langle a, b\rangle$ máme

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left((\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (\mathscr{R})\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)(x - x_0)\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left((\mathscr{R})\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - (\mathscr{R})\int_x^{x_0} f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left((\mathscr{R})\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}(\mathscr{R})\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\\ &< \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}(\mathscr{R})\int_{x_0}^x \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}|x - x_0| = \varepsilon,\end{aligned}$$

teda ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \langle a, b\rangle$ platí

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon, \quad \text{t.j.} \quad F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

a teda F je diferencovateľná v x_0. □

Poznámka 3.72. Analogické tvrdenie platí pre funkciu $G(x) = (\mathscr{R})\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -(\mathscr{R})\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Všimnime si, že ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, tak časť (ii) vlastne hovorí, že $F \in \mathscr{C}^1\langle a, b\rangle$, t.j. derivácia funkcie F je spojitá funkcia (alebo tiež F je spojite diferencovateľná)! Veta 3.71 sa niekedy zvykne označovať aj ako *Torricelliho*[7]*-Barrowova*[8] *veta*. Prvé publikované pojednanie o fundamentálnej vete (v zúženej platnosti) patrí JAMESOVI GREGORYMU[9]. Nezávisle sa otázkami kalkulu zaoberal Torricelli, ktorý je známy hlavne vďaka objavu barometra[10] v roku 1644. Isaac Barrow pravdepodobne

[7] GIOVANNI EVANGELISTA TORRICELLI (1608–1647), čítaj „Toričeli"

[8] ISAAC BARROW (1630–1677)

[9] JAMES GREGORY (1638–1675)

[10] TORR je vo fyzike jednotka tlaku pomenovaná na počesť Torricelliho, avšak od roku 1980 je už neplatná, pretože sa namiesto nej používa jednotka tlaku sústavy SI pascal (Pa), prepočet 1 TORR=133,322 Pa.

ako prvý dokázal všeobecnú verziu tejto vety v roku 1670, avšak až Barrowov žiak Isaac Newton dokončil vývoj potrebného matematického aparátu k jej uspokojivému dôkazu. Gottfried Leibniz zasa systematizoval poznatky do reči infinitezimálnych veličín (tzv. Leibnizov charakteristický trojuholník).

Poznámka 3.73. Spojitosť funkcie f v bode $x_0 \in \langle a, b \rangle$ sa nedá z predpokladov Vety 3.71 vynechať. Stačí uvažovať funkciu $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\langle -1, 1 \rangle$ a bod $x_0 = 0$. Potom $F(x) = (\mathscr{R}) \int_{-1}^{x} \operatorname{sgn} t \, \mathrm{d}t = |x|$, a teda F nie je diferencovateľná v bode $x_0 = 0$.

Fundamentálna veta integrálneho kalkulu má pre nás veľký význam, pretože má za následok niekoľko dôležitých dôsledkov, ktoré teraz uvedieme.

Dôsledok 3.74. Ak $a < b$ a $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, tak $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left((\mathscr{R}) \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \right)$. Ak F je primitívna funkcia k f na $\langle a, b \rangle$, potom $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t + F(a)$.

Príklad 3.75. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t}{x}.$$

Keďže funkcia $f(t) = \cos t^2$ je spojitá na $\mathbb{R}$, potom podľa fundamentálnej vety integrálneho kalkulu je funkcia $F(x) = (\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t$ diferencovateľná na $\mathbb{R}$. Daná limita je typu „$\frac{0}{0}$“, a teda podľa L'Hospitalovho pravidla platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left((\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t \right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

Poznamenajme, že funkcia $C(x) = (\mathscr{R}) \int_0^x \cos t^2 \, \mathrm{d}t$ sa zvykne označovať ako *Fresnelov*[11] *integrál* a je príkladom neelementárnej (transcendentálnej) funkcie, ktorá sa používa v optike.

Nasledujúca veta je sľúbeným tvrdením, ktoré sme používali zatiaľ bez dôkazu. Jednak je dôležitá z teoretických príčin a zároveň ukazuje, ako primitívnu funkciu k spojitej funkcii hľadať – ako $\mathscr{R}$-integrál s premennou hornou hranicou integrovania. Spomeňme, že toto tvrdenie poznal už Cauchy v roku 1823 (samozrejme v súvislosti so svojím integrálom).

Veta 3.76 (o existencii primitívnej funkcie k spojitej funkcii). *Ku každej spojitej funkcii f na $\langle a, b \rangle$ existuje primitívna funkcia na $\langle a, b \rangle$.*

Dôkaz. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b \rangle$, tak $f \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$, viď Veta 3.41. Podľa fundamentálnej vety integrálneho kalkulu je funkcia $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ diferencovateľná na $\langle a, b \rangle$ a $F'(x) = f(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$, t.j. F je primitívnou funkciou k f na $\langle a, b \rangle$. $\square$

Doteraz sme uviedli množstvo tvrdení týkajúcich sa $\mathscr{R}$-integrálu, ktoré však nedávali odpoveď na otázku jeho výpočtu (videli sme, že z definície je výpočet značne komplikovaný). Nasledujúca veta nám podstatne zjednoduší výpočet niektorých $\mathscr{R}$-integrálov tak, že ho prevedieme na $\mathscr{N}$-integrál.

[11] Augustin-Jean Fresnel (1788–1827), čítaj „Frenel“

Veta 3.77 (o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu). *Ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle \cap \mathscr{N}\langle a,b\rangle$, potom $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dôkaz. Ak $f \in \mathscr{N}\langle a,b\rangle$, tak existuje primitívna funkcia F k f na $\langle a,b\rangle$, ktorá je diferencovateľná, a teda spojitá na $\langle a,b\rangle$. Na druhej strane, ak $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, uvažujme normálnu postupnosť delení $D_n = \{x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{l_n,n}\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$. Zo spojitosti F na $\langle a,b\rangle$ vyplýva jej spojitosť na každom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1,n}, x_{i,n}\rangle$, $i = 1,2,\dots,l_n$ a podľa Lagrangeovej vety pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\xi_{i,n} \in (x_{i-1,n}, x_{i,n})$ také, že $F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n}) = F'(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) = f(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n})$. Sčítaním cez všetky čiastočné intervaly potom dostávame

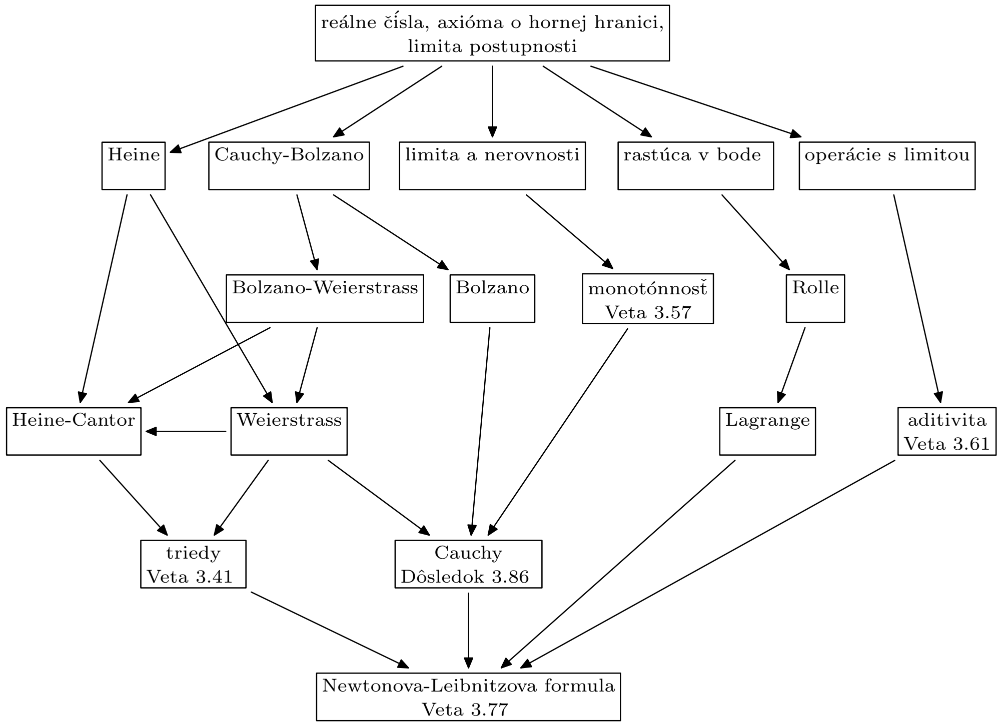
$$\sum_{i=1}^{l_n}(F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n})) = F(x_{l_n,n}) - F(x_{0,n}) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{l_n} f(\xi_{i,n})\Delta x_{i,n},$$

čiže $F(b) - F(a) = \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$. Keďže $f \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$, z Vety 3.35 pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a,b\rangle$ a každý výber reprezentantov Ξ_n z delenia D_n (teda aj pre $\xi_{i,n} \in \Xi_n$) platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a keďže $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, limitným prechodom $n \to \infty$ dostávame $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Poznámka 3.78. V súvislosti s Vetou 3.77 sa v literatúre často môžeme stretnúť s výrazom *Newtonova-Leibnizova formula* v tvare $F(b) - F(a) = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Spomeňme, že autormi tejto formuly nie sú ani Newton, ani Leibniz. Ako už bolo spomenuté vyššie, prvý toto tvrdenie dokázal Isaac Barrow, ktorého môžeme považovať za predchodcu diferenciálneho a integrálneho počtu, pretože značne ovplyvnil Isaaca Newtona svojimi prácami o dotyčniciach.

Hneď na úvod treba čitateľa schladiť, aby tvrdenie Vety 3.77 príliš nepreceňoval. Sú v nej totiž dva dôležité predpoklady: $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrovateľnosť (t.j. existencia primitívnej funkcie), ktoré sú inak nezávislé. *Nedá sa teda pomocou nej počítať každý $\mathscr{R}$-integrál*! Dokonca neuspejeme ani s relatívne jednoduchým rozšírením na zovšeobecnenú primitívnu funkciu (viď záverečné poznámky k $\mathscr{N}$-integrálu v Kapitole 2) a zovšeobecnený Newtonov-Leibnizov vzorec, pretože nie každá $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia má zovšeobecnenú primitívnu funkciu (napr. Riemannova funkcia), avšak až do takýchto detailov zachádzať nechceme.

Na Obr. 3.13 vidíme celý „rodokmeň“ tvrdení, ktoré sú potrebné k rigoróznemu dôkazu Vety 3.77 (poznamenajme, že je to myslené pre spojité funkcie na uzavretom intervale). Dovolíme si tvrdiť, že keby o tomto rodokmeni vedeli v druhej polovici 17. storočia, asi by nenašli dostatočnú odvahu sformulovať a používať túto formulu. Taktiež si môžeme všimnúť nádhernú prepojenosť jednotlivých častí reálnej analýzy počnúc jej vybudovaním, cez postupnosti, funkcie a ich vlastnosti, diferenciálny až po integrálny počet. Treba zdôrazniť, že tento rodokmeň si nezakladá na svojej úplnosti, t.j. nezahŕňa úplne všetky cesty, akými sa je možné dopracovať k dôkazu Newtonovej-Leibnizovej formuly, ako ani všetky možnosti dôkazov jednotlivých tvrdení na základe iných (resp. všetky implikácie). Do značnej miery ale odráža myšlienky dôkazov jednotlivých tvrdení tak, ako ste sa s nimi stretli počas prvých



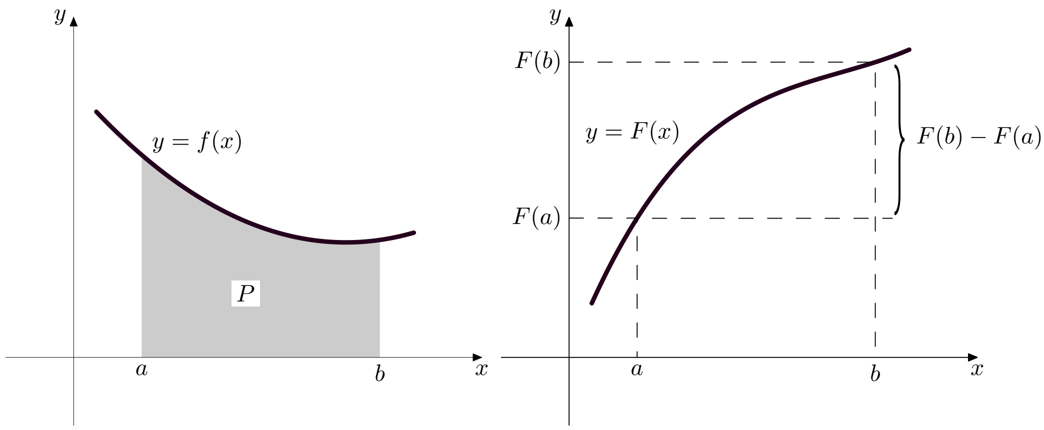
Obr. 3.13: „Rodokmeň" tvrdení na dôkaz vzťahu medzi $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálom

dvoch semestrov matematickej analýzy. Pripomeňme tiež, že skratky tvrdení uvedené na Obr. 3.13 znamenajú v prípade mena vetu s príslušným názvom (napr. meno „Weierstrass" odkazuje na Weierstrassovu vetu o ohraničenosti a vetu o maxime a minime spojitej funkcie na uzavretom a ohraničenom intervale), zatiaľ čo ostatné skratky bez mena a/alebo čísla vety z tohto textu odkazujú na nasledujúce tvrdenia:

operácie s limitou	...	veta o základných operáciách s limitou postupnosti
limita a nerovnosti	...	veta o zachovávaní nerovnosti medzi členmi postupností limitným prechodom

Poznámka 3.79. Geometricky sa vzťah medzi $\mathscr{N}$-integrálom a $\mathscr{R}$-integrálom (resp. Newtonova-Leibnizova formula) dá interpretovať nasledujúcim spôsobom: *$\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa rovná prírastku primitívnej funkce $F(x)$ na intervale* $\langle a,b\rangle$, viď Obr. 3.14 (poznamenajme, že obidve funkcie môžu byť definované na širšom intervale ako sme poznamenali v Kapitole 2). Môžeme tiež vidieť, že tento vzťah umožňuje za istých predpokladov (napríklad pre spojité funkcie) formulovať vety diferenciálneho kalkulu ako vety integrálneho kalkulu a naopak, viď tiež Poznámku 3.89.

Ďalším zaujímavým zistením je, že ak f je kladná funkcia na $\langle a,b\rangle$, tak primitívna funkcia F (ak existuje) je rastúca. Naozaj, keďže $F'(x)=f(x)>0$ pre $x\in\langle a,b\rangle$, tak F je rastúca funkcia na $\langle a,b\rangle$. Z našej intuitívnej predstavy ($\mathscr{R}$-integrál ako plocha pod grafom – viď motivácia zo začiatku kapitoly) to znamená, že pri zafixovanej dolnej hranici a a zväčšujúcej sa hornej hranici b sa hodnota $\mathscr{R}$-integrálu zväčšuje, t.j. F musí rásť, aby sa zväčšoval prírastok $F(b)-F(a)$, viď Obr. 3.14.



Obr. 3.14: Vzťah medzi $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálom – geometrická interpretácia

Na základe Vety 3.77 *môžeme používať metódy výpočtu pre $\mathscr{N}$-integrál* (per partes a substitučná metóda) *na výpočet $\mathscr{R}$-integrálu iba ak vieme, že oba tieto integrály existujú* (zdôvodnite teraz poriadne ich použitie v Príklade 3.37 a 3.59). Dá sa však očakávať, že uvedené metódy majú všeobecnejšiu platnosť (formuláciu) pre $\mathscr{R}$-integrál, čo je skutočne pravda, avšak to nebudeme robiť, ani to nebude mať veľký vplyv na riešenie príkladov.

Príklad 3.80. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ (viď Veta 3.41) a $f \in \mathscr{N}\langle a, b\rangle$ (viď Veta 3.76), teda $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (viď Veta 3.77). Všeobecne o vzťahu $\mathscr{R}$-integrálu a $\mathscr{N}$-integrálu pre nespojité funkcie nevieme veľa povedať, ako o tom referujú nasledujúce príklady.

- Príkladom funkcie $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle \setminus \mathscr{N}\langle a, b\rangle$ je $f(x) = \operatorname{sgn} x$ pre každý interval $\langle a, b\rangle$ obsahujúci bod 0. Iným príkladom je Riemannova funkcia ρ na $\langle 0, 1\rangle$.
- Funkcia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nie je $\mathscr{R}$-interovateľná na $\langle 0, 1\rangle$, pretože nie je ohraničená na $\langle 0, 1\rangle$. Avšak existuje $\mathscr{N}$-integrál, pretože
$$(\mathscr{N})\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2,$$
teda $f \in \mathscr{N}\langle a, b\rangle \setminus \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Existujú aj príklady ohraničených $\mathscr{N}$-integrovateľných funkcií, ktoré nie sú $\mathscr{R}$-integrovateľné, ale konštrukcia takýchto príkladov je nad rámec preberaného učiva (spomeňme len, že príklad takejto funkcie skonštruoval už v roku 1881 Vito Volterra).
- Zrejme Dirichletova funkcia χ je príkladom (ohraničenej) funkcie, ktorá nie je ani $\mathscr{R}$-integrovateľná, ani $\mathscr{N}$-integrovateľná na ľubovoľnom intervale $\langle a, b\rangle$.

V nasledujúcom ilustrujeme dva praktické dôsledky fundamentálnej vety integrálneho kalkulu. Prvý pojednáva o tvare zvyšku pre Taylorov polynóm, druhý nám priblíži jednu užitočnú metódu počítania niektorých integrálov, tzv. derivovanie pod znakom integrálu.

Poznámka 3.81. Naozaj, ak $(n+1)$-krát diferencovateľnú funkciu f na okolí bodu x_0 zapíšeme v tvare

$$f(x) = f(x_0) + (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

a na posledný $\mathscr{R}$-integrál aplikujeme metódu per partes (zdôvodnite korektnosť tohto použitia!) na funkcie $u'(t) = 1$ a $v(t) = f'(t)$, potom

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) - [(x-t)f'(t)]_{x_0}^{x} + (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kde sme oproti „klasickým príkladom“ použili primitívnu funkciu $u(t) = -(x-t)$, kde x je teraz konštanta. Ak na posledný $\mathscr{R}$-integrál opäť aplikujeme metódu per partes pre funkcie $u'(t) = x-t$ a $v(t) = f''(t)$, dostaneme

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pokračovaním $(n-2)$-krát dostávame

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (\mathscr{R}) \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t,$$

kde v zmysle Taylorovej vety posledný $\mathscr{R}$-integrál nie je nič iné ako *zvyšok R_n po n-tom Taylorovom polynóme T_n*.

Poznámka 3.82. Fundamentálna veta integrálneho kalkulu sa dá rozšíriť rôznymi smermi. Jedným z nich je zaujímavá metóda tzv. *derivovania pod znakom integrálu.* Predstavme si, že chceme vypočítať nasledujúci integrál

$$(\mathscr{R}) \int_{0}^{1} \frac{x^t - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x,$$

kde $t > -1$ je parameter. Môžeme si všimnúť, že výsledok nášho snaženia bude funkcia $g(t)$ závisiaca od tohto parametra, t.j. vo všeobecnosti máme

$$g(t) = (\mathscr{R}) \int_{a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

pričom $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ (s prípadom intervalu nekonečnej dĺžky sa stretneme v Kapitole 5) a funkcia $f(x,t)$ je ohraničená pre každú hodnotu (vhodného) parametra t (aby sme sa vôbec mohli baviť o jej $\mathscr{R}$-integráli, hoci vieme, že to nie je postačujúca podmienka jeho existencie!). Teraz sme trošku v delikátnej situácii, pretože predbiehame sled kurzov: totiž s teóriou reálnych funkcií viacerých (v našom prípade dvoch) reálnych premenných sa stretnete až neskôr. Považujte to teda za motiváciu a potrebu zapísania si tohto kurzu. Predpokladajme teda na chvíľu, že v našom príklade je funkcia g daná integrálom diferencovateľná. Potom „sedliacky rozum“ káže počítať jej deriváciu nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathscr{R})\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x\right) = (\mathscr{R})\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x^t-1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_0^1 \frac{x^t\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x \\ &= (\mathscr{R})\int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_0^1 x^t\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1+t}}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

Keďže $g'(t) = \frac{1}{1+t}$, tak integrovaním oboch strán sa ľahko dopracujeme k výsledku $g(t) = \ln(1+t) + c$. Konštantu c získame napr. položením $t = 0$, z čoho potom $g(0) = 0 = c$. Úhrnom teda máme

$$(\mathscr{R})\int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+t), \quad t > -1.$$

Avšak bolo naše použitie „sedliackeho rozumu“ matematicky korektné? Najdôležitejšou otázkou je použitie zámeny derivácie a integrálu, ktorý sme v našom výpočte urobili. Ako to už obvykle v matematike býva, vo všeobecnosti to nemôžeme urobiť, avšak skonštruovanie kontrapríkladu nie je ani také komplikované, ako zdĺhavé. Preto sa v nasledujúcom tvrdení uspokojíme iba so stanovením postačujúcich podmienok, kedy je táto zámena možná bez príslušného dôkazu.

Tvrdenie 3.83. *Nech pre funkciu $f : \langle a,b\rangle \times T \to \mathbb{R}$ platia nasledujúce podmienky:*

(i) pre každé $t \in T$ je $|f(x,t)| \le A(x)$ a $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)| \le B(x)$, kde $A, B \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$;

(ii) $f(x,t)$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)$ sú spojité funkcie na $\langle a,b\rangle \times T$.

Potom pre každé $t \in T$ platí

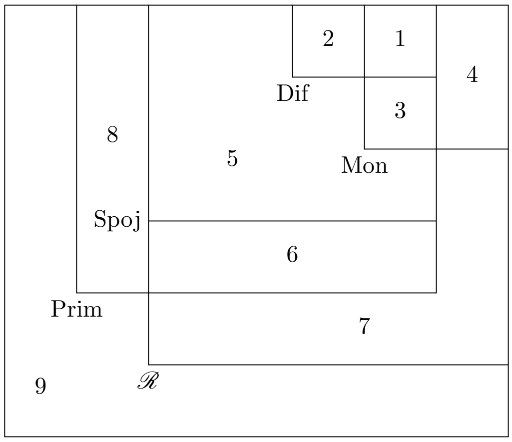
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathscr{R})\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = (\mathscr{R})\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Posledná rovnosť sa zvykne označovať ako derivovanie pod znakom integrálu. Korektnejšie by sme ho mali zapísať pomocou parciálnych derivácií vo vnútri integrálu, ale s tými sa stretnete až v ďalšom semestri (jednoducho povedané funkciu derivujeme vzhľadom na premennú t, kde všetky ostatné výrazy obsahujúce premennú x považujeme za konštanty). Stručne, pre derivovanie pod integrálom potrebujeme zabezpečiť ohraničenosť spojitých funkcií $f(x,t)$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)$ dvoma $\mathscr{R}$-integrovateľnými funkciami nezávislými na parametri t. Overte splnenie uvedených podmienok v predchádzajúcom príklade.

Poznámka 3.84. Po vybudovaní potrebného aparátu je vhodné sa k tejto metóde vrátiť, pretože umožňuje vypočítať niektoré dôležité integrály, ktoré sa dajú klasickými metódami len ťažko spočítať, ako napr.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Taktiež viacero dôležitých funkcií je daných v tvare takéhoto integrálu závislého na parametri, napr. mnohé integrálne transformácie (Fourierova, Laplaceova), špeciálne funkcie (Eulerova Beta a Gama funkcia) a ďalšie.



Obr. 3.15: Diagram množín

Počas tohto kurzu sme sa mali možnosť stretnúť s niekoľkými tvrdeniami, ktoré sa dajú sformulovať v tvare inklúzie dôležitých tried funkcií. Zhrnieme niektoré z nich a znázorníme pomocou Vennovho diagramu.

Pre reálne funkcie definované na $\langle a, b\rangle$ postupne označme

Mon	...	množinu všetkých monotónnych funkcií
Dif	...	množinu všetkých diferencovateľných funkcií
Spoj	...	množinu všetkých spojitých funkcií
$\mathscr{R}$	...	množinu všetkých $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií
Prim	...	množinu všetkých funkcií, ktoré majú primitívnu funkciu.

Pripomeňme výsledky, ktoré poznáme: Mon $\subset \mathscr{R}$ (Veta 3.41), Spoj $\subset \mathscr{R}$ (Veta 3.41), Dif $\subset$ Spoj (z diferenciálneho počtu) a Spoj $\subset$ Prim (Veta 3.76). Tieto implikácie možno ilustrovať diagramom na Obr. 3.15. Každá z množín Mon, Dif, Spoj, $\mathscr{R}$ a Prim je znázornená obdĺžnikom, pri ktorého ľavom rohu je označenie príslušnej množiny.

Zaujíma nás, či existujú implikácie (inklúzie), ktoré sme pri kreslení z neznalosti nezohľadnili, a ktoré by diagram zjednodušili. Žiaľ, odpoveď je záporná, pretože každá z oblastí 1–9 predstavuje neprázdnu množinu funkcií. Nemal by preto byť pre čitateľa problém nájsť príklad funkcie patriacej do každej zo zodpovedajúcich množín.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Existuje v „rodokmeni“ na Obr. 3.13 vetva, ktorou sa dokážeme dopracovať k Newtonovej-Leibnizovej formule pre nespojité funkcie?

◇ Kde sa v danom diagrame na Obr. 3.15 nachádza „Newtonovo-Leibnizovo kráľovstvo“?

◇ Nech $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, funkcie g, h sú diferencovateľné na $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Určte

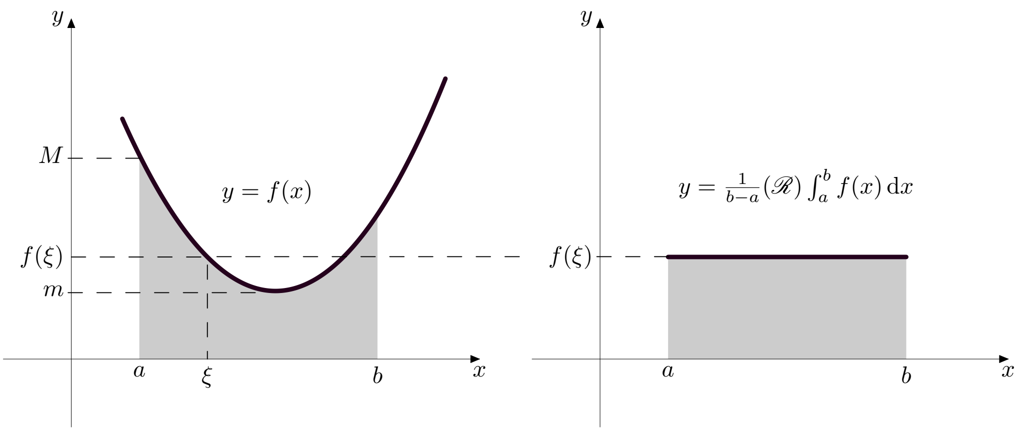
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\mathscr{R})\int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\mathscr{R})\int_{h(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

◇ Vypočítajte integrál
$$(\mathscr{R})\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

◇ Výsledok práce snaživého počtára je nasledovný
$$(\mathscr{R})\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 x(1+2\mathrm{tg}^2 x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left|\begin{array}{c}\text{substitúcia}\\ t=\mathrm{tg}\,x\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x=\pi\Rightarrow t=0\end{array}\right| = (\mathscr{R})\int_0^0 \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$
Jeho spolužiak však namieta, že to nie je dobré, lebo integrand je spojitá a kladná funkcia a podľa Vety 3.57 aj hodnota $\mathscr{R}$-integrálu z tejto funkcie musí byť kladná. Kto má pravdu a kde je v uvedenom výpočte chyba?

3.6 O stredných hodnotách integrálneho počtu

Z intuitívnej predstavy $\mathscr{R}$-integrálu vieme, že plošný obsah útvaru ohraničeného grafom spojitej nezápornej funkcie f na $\langle a,b\rangle$ a priamkami $x=a, x=b$ a $y=0$, je daný číslom $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dá sa teda očakávať, že tento obsah sa bude dať vtesnať do nejakého obdĺžnika so základňou $b-a$ a výškou, ktorá bude rovná hodnote funkcie v nejakom bode $\xi\in\langle a,b\rangle$ tak, aby platilo $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$, ako o tom pojednáva obrázok.



Táto názorná skutočnosť sa dá sformulovať presne a omnoho všeobecnejšie.

Veta 3.85 (prvá veta o strednej hodnote integrálneho počtu). *Nech $f,g\in\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ a pre každé $x\in\langle a,b\rangle$ je $g(x)\ge 0$. Potom existuje $\alpha\in\mathbb{R}$, $m\le\alpha\le M$, kde $m=\inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, také, že*
$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\cdot(\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Keďže pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $m \leq f(x) \leq M$, potom $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, a teda podľa Vety 3.57 a 3.55 platí

$$m \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z Vety 3.57 tiež plynie, že $(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Ak $(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, tvrdenie vety je triviálne. Nech teda $(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Potom

$$m \leq \frac{(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M,$$

teda hľadané číslo α má tvar $\alpha = \dfrac{(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{(\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. □

Dôsledok 3.86 (Cauchy 1821). Nech $g \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $g(x) \geq 0$ alebo $g(x) \leq 0$. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Ak $f(x) \equiv c$ na $\langle a, b\rangle$, potom tvrdenie platí triviálne. Nech teda f nie je konštantná na $\langle a, b\rangle$. Podľa Weierstrassovej vety funkcia f nadobúda na $\langle a, b\rangle$ svoje maximum a minimum, označme ich M a m. Z $\mathscr{R}$-integrovateľnosti f na $\langle a, b\rangle$ a z prvej vety o strednej hodnote existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \leq \alpha \leq M$ také, že $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot (\mathscr{R}) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Z Darbouxovej vety pre spojitú funkciu f na $\langle a, b\rangle$ potom vyplýva, že existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že $\alpha = f(\xi)$. □

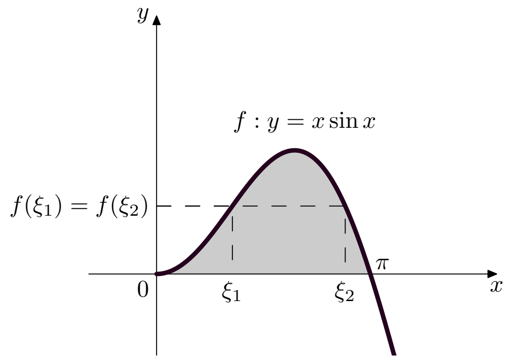
Dôsledok 3.87. Ak $f \in \mathscr{C}\langle a, b\rangle$, potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3.88. Predchádzajúci dôsledok má spomínaný názorný geometrický význam z úvodu tejto časti. Číslo $\frac{1}{b-a}(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa zvykne označovať ako *stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$*. Poznamenajme, že ide ešte stále o všeobecnejší výsledok než v motivačnom príklade, pretože nepredpokladáme nezápornosť funkcie f. Uvedené číslo sa tiež zvykne nazývať *aritmetický integrálny priemer* funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Poznamenajme, že v uvedenom dôsledku možno namiesto $\xi \in \langle a, b\rangle$ písať silnejšie $\xi \in (a, b)$. Naozaj, ak $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a)$ a nech neexistuje $\xi \in (a, b)$ také, že $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$. Potom pre každé $x \in (a, b)$ je $f(x) \neq f(a)$ (lebo f je spojitá a platí Darbouxova veta), napr. nech $f(x > f(a))$. Potom ale dostávame spor, pretože $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > f(a)(b-a)$.

Pre nespojité funkcie Dôsledok 3.87 neplatí! V Príklade 3.15 sme videli, že $(\mathscr{R}) \int_{-2}^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = -1$. Keďže stredná hodnota funkcie $\operatorname{sgn} x$ na intervale $\langle -2, 1\rangle$ je rovná $-\frac{1}{3}$, neexistuje $\xi \in \langle -2, 1\rangle$ také, že $\operatorname{sgn} \xi = -\frac{1}{3}$, teda stredná hodnota nie je funkčnou hodnotou.



Obr. 3.16: Stredná hodnota funkcie $f(x) = x \sin x$ na intervale $\langle 0, \pi \rangle$

Poznámka 3.89. Pri diferenciálnom počte sme mali kapitolu s rovnakým názvom. Keďže integrálny a diferenciálny počet spolu úzko súvisia a keďže sme už spomenuli možnosť formulácie niektorých tvrdení z integrálneho počtu na tvrdenia diferenciálneho počtu, dá sa očakávať, že existuje súvis medzi týmito strednými hodnotami. Naozaj, tvrdenie Dôsledku 3.86 je len špeciálnym prípadom Cauchyho vety o strednej hodnote diferenciálneho počtu aplikovanej na funkcie $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a $G(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ (zdôvodnite!). Z toho potom vyplýva, že Dôsledok 3.87 je jej špeciálnym prípadom, resp. môžeme tiež použiť Lagrangeovu vetu pre funkciu $F(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (zdôvodnite!).

Príklad 3.90. Vypočítajte strednú hodnotu funkcie $f(x) = x \sin x$ na intervale $\langle 0, \pi \rangle$. Hľadanú hodnotu vypočítame ako

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}(\mathscr{R}) \int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}(\mathscr{N}) \int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left([-x \cos x]_0^\pi + (\mathscr{N}) \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi}(\pi - 0 + \sin \pi - \sin 0) = 1,\end{aligned}$$

kde na výpočet integrálu sme použili metódu per partes na funkcie $u(x) = x$ a $v'(x) = \sin x$. Teda $f(\xi) = 1$. Takýchto čísel môže v danom intervale existovať aj viac, pretože $f(0) = f(\pi) = 0$ a $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 1$, teda v tomto prípade existujú dve, viď Obr. 3.16.

Niekedy je výhodné vyjadriť $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ aj v prípadoch, keď nepredpokladáme nezápornosť, resp. nekladnosť funkcie g. Určitým zovšeobecnením prvej vety o strednej hodnote je nasledujúce tvrdenie, ktorého autorom je pravdepodobne Paul Du-Bois Reymond.

Veta 3.91 (druhá veta o strednej hodnote integrálneho počtu). *Nech f je monotónna na $\langle a, b \rangle$ a $g \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ také, že*

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a) \cdot (\mathscr{R}) \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b) \cdot (\mathscr{R}) \int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme za silnejších predpokladov spojitosti funkcií f, g (avšak stále predpokladáme monotónnosť funkcie f), dôkaz pôvodného tvrdenia viď [9]. Zo spojitosti g na $\langle a, b\rangle$ vyplýva $\mathscr{R}$-integrovateľnosť, a teda existuje spojitá a diferencovateľná funkcia $G(x) = (\mathscr{R}) \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ na $\langle a, b\rangle$. Podľa Vety 3.77 o vzťahu $\mathscr{R}$- a $\mathscr{N}$-integrálu môžeme na integrál $(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ použiť metódu per partes, čím dostávame

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - (\mathscr{R}) \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podľa prvej vety o strednej hodnote integrálneho počtu (zdôvodnite!) existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ také, že $(\mathscr{R}) \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi)(\mathscr{R}) \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi)(f(b) - f(a))$. Dosadením dostávame

$$\begin{aligned}
(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [f(x)G(x)]_a^b - G(\xi)(f(b) - f(a)) \\
&= f(b)G(b) - G(\xi)(f(b) - f(a)) \\
&= f(a)G(\xi) + f(b)(G(b) - G(\xi)) \\
&= f(a) \cdot (\mathscr{R}) \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b) \cdot (\mathscr{R}) \int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. □

Poznámka 3.92. Predpoklad monotónnosti funkcie f sa nedá z Vety 3.91 vynechať, pretože pre $f(x) = x^2 - 1$ a $g(x) = 1$ na $\langle -1, 1\rangle$ je $(\mathscr{R}) \int_{-1}^1 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}$, ale pravá strana je stále rovná 0, pretože $f(1) = f(-1) = 0$.

Príklad 3.93. Odhadnite veľkosť integrálu $\left|(\mathscr{R}) \int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|$, $A \in \mathbb{R}$, $A > 1$. Keďže $f(x) = \frac{1}{x}$ je klesajúca na $\langle 1, +\infty)$ a $g(x) = \sin x$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle 1, A\rangle$, použitím druhej vety o strednej hodnote existuje $\xi \in \langle 1, A\rangle$ také, že

$$\begin{aligned}
(\mathscr{R}) \int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= (\mathscr{R}) \int_1^\xi \sin x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{A}(\mathscr{R}) \int_\xi^A \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_1^\xi - \frac{1}{A}[\cos x]_\xi^A \\
&= \cos 1 - \cos\xi + \frac{1}{A}(\cos\xi - \cos A),
\end{aligned}$$

a preto

$$\left|(\mathscr{R}) \int_1^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le |\cos 1 - \cos\xi| + \frac{1}{A}|\cos\xi - \cos A| \le 2 + \frac{2}{A}.$$

Príklad 3.94. Vypočítajte nasledujúcu limitu

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Podľa prvej vety o strednej hodnote pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $\xi_n \in \langle 0, 1\rangle$ také, že

$$(\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi_n}(\mathscr{R}) \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi_n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(1+\xi_n)(n+1)}.$$

Keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\xi_n} \leq 1$, t.j. postupnosť $(\frac{1}{1+\xi_n})_1^\infty$ je ohraničená a postupnosť $(\frac{1}{n+1})_1^\infty$ konverguje k 0 pre $n \to \infty$, potom aj postupnosť $(\frac{1}{1+\xi_n}\frac{1}{n+1})_1^\infty$ konverguje k 0 pre $n \to \infty$, a teda

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{R}) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Nájdite nejakú triedu funkcií, pre ktorú je číslo ξ v Dôsledku 3.87 jednoznačne určené.

◇ Odvoďte vzorce pre aritmetický a geometrický priemer čísel a, b.

◇ Určte znamienko integrálu

$$(\mathscr{R}) \int_0^{2\pi} x^{158} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

★ Niekoľko poznámok k Riemannovmu integrálu

Ako sme uviedli, Riemannova konštrukcia integrálu poskytuje dosť širokú triedu integrovateľných funkcií za predpokladu ohraničenosti funkcie na uzavretom a ohraničenom intervale. Taktiež sme spomenuli, že pôvodná Riemannova práca neobsahovala žiadny predpoklad na integrovanú funkciu. To sa dá zdôvodniť tým, že integrálne súčty môžu existovať aj v prípade neohraničených funkcií. Preto sa môžeme právom pýtať: Čo ak táto podmienka nie je splnená, t.j. funkcia nie je ohraničená a/alebo interval nie je konečnej dĺžky? Túto otázku rieši tzv. *nevlastný $\mathscr{R}$-integrál*, s ktorým sa stručne zoznámime v Kapitole 5.

(i) Zaujímavosťou je, že celá predvedená konštrukcia $\mathscr{R}$-integrálu sa dá prepísať veľmi jednoducho axiomaticky, t.j. pomocou jednoduchých tvrdení, ktoré odrážajú jeho základné a najdôležitejšie vlastnosti. V podstate to teraz predvedieme pre Cauchyho integrál, teda pre prípad spojitých funkcií: Riemannov integrál spojitej funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ (označme $I_a^b(f)$) je funkcionál taký, že

(a) pre každé $x, y \in \langle a, b\rangle$, $x \leq y$, máme

$$I_x^{y+\varepsilon}(f) = I_x^y(f) + I_y^{y+\varepsilon}(f)$$

pre každé $\varepsilon > 0$, pre ktoré $y + \varepsilon \in \langle a, b\rangle$;

(b) pre každé $x, y \in \langle a, b\rangle$, $x \leq y$, je

$$\min_{z\in\langle x,y\rangle} f(z) \leq I_x^y(f) \leq \max_{z\in\langle x,y\rangle} f(z).$$

Takéto axiomatické zavedenie teda reflektuje aditivitu a ohraničenosť hodnoty čísla $I_a^b(f)$. Jeho výhodou je nesporne elegantnosť zavedenia, no k vybudovaniu $\mathscr{R}$-integrálu až po praktické výpočty je od tohto kroku ešte dlhá cesta.

(ii) Cesta k dôkazu existencie primitívnej funkcie k spojitej funkcii cez $\mathscr{R}$-integrál nie je jediná možná. Jeden z dôvodov, prečo sme išli touto cestou, bol, že to bol (intuitívny) nástroj pre dokázanie fundamentálnej vety integrálneho kalkulu.

(iii) Ak si teda dobre všimneme spôsob narábania s $\mathscr{R}$-integrálom, tak vidíme opodstatnenosť zavedenia $\mathscr{N}$-integrálu, ktorý je (v trochu nadnesenom zmysle) jediným, ktorý dokážeme vypočítať. Výpočet $\mathscr{R}$-integrálu sa na výpočet $\mathscr{N}$-integrálu prevádza, v čom má zásadný význam Veta 3.77.

(iv) Vývoj integrálu sa zavedením $\mathscr{R}$-integrálu ani náhodou neskončil. Ďalšie relatívne jednoduché zovšeobecnenie nasledovalo onedlho vytvorením tzv. *Riemannovho-Stieltjesovho*[12] *integrálu*, viď [10], ktorý umožňuje (okrem iných) počítanie integrálu $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}\cos x$. Môžeme si všimnúť, že ide o zovšeobecnenie Riemannovho integrálu, v ktorom $\mathrm{d}x$ nahradíme výrazom $\mathrm{d}g(x)$ pre nejakú vhodnú funkciu g (tzv. funkcie ohraničenej variácie). Iba upozorníme, že $\mathrm{d}g(x)$ má len symbolický význam, nemusí to byť diferenciál funkcie g, keďže g nemusí mať vo všeobecnosti deriváciu. V prípade, že g je diferencovateľná, Riemannov-Stieltjesov integrál sa dá veľmi jednoducho previesť na $\mathscr{R}$-integrál.

(v) Moderné partie matematiky sú závislé na použití „lepšieho“ integrálu, ktorý skonštruoval začiatkom 20. storočia Henri Lebesgue a ako sme už spomínali, umožňuje integrovať aj Dirichletovu funkciu (nie je však jediný, ktorý to dokáže). Jedným z dôvodov, prečo sa zaviedol Lebesgueov integrál je, že systém $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ aj pre ohraničený interval $\langle a,b\rangle$ nemá dobré konvergenčné vlastnosti. Napríklad postupnosť funkcií

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m} = \begin{cases} 1, & x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$$

je konvergentná pre $n \to \infty$ a konverguje (bodovo) k Dirichletovej funkcii χ, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a,b\rangle.$$

Nie je ťažké ukázať, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in \mathscr{R}\langle a,b\rangle$ (množina bodov nespojitosti je konečná) a $(\mathscr{R}) \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, ale vieme, že Dirichletova funkcia χ nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná na $\langle a,b\rangle$. To znamená, že postupnosť $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií môže konvergovať k funkcii, ktorá nie je $\mathscr{R}$-integrovateľná (inými slovami, *priestor* $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ *nie je úplný*). Do istej miery môžeme prirovnať priestor $\mathscr{R}\langle a,b\rangle$ k množine racionálnych čísel $\mathbb{Q}$: potrebné dobré vlastnosti mu dodá až proces obdobný pridaniu axiómy o hornej hranici. Presnejšie, zdá sa byť prirodzené rozšíriť triedu $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií tým, že definujeme integrál limitnej funkcie f postupnosti $(f_n)_1^\infty$ vzťahom

$$\lim_{n\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

To však nie je až také jednoduché a vedie to ku konzistentnému pojmu integrálu a novej triede integrovateľných funkcí, ktorými sú Lebesgueovsky integrovateľné funkcie

[12] Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894), čítaj „Stíltjes“

(skrátene $\mathscr{L}$-integrovateľné funkcie). Táto trieda integrovateľných funkcií je ostro väčšia ako trieda $\mathscr{R}$-integrovateľných funkcií. Toto porovnanie však neplatí pre nevlastný $\mathscr{R}$-integrál a $\mathscr{L}$-integrál.

(vi) Ani nevlastný $\mathscr{R}$-integrál, ani $\mathscr{L}$-integrál neriešia uspokojivo konštrukciu antiderivácie (t.j. primitívnej funkcie). Preto jedna z ciest vývoja integrálu pokračovala smerom vyriešiť tento problém. Sčasti uspokojivú odpoveď poskytli Arnaud Denjoy[13] v roku 1912 and Oskar Perron[14] v roku 1914. Dnes vieme, že Denjoyova a Perronova definícia integrálu sú ekvivalentné, avšak obe sú veľmi komplikované.

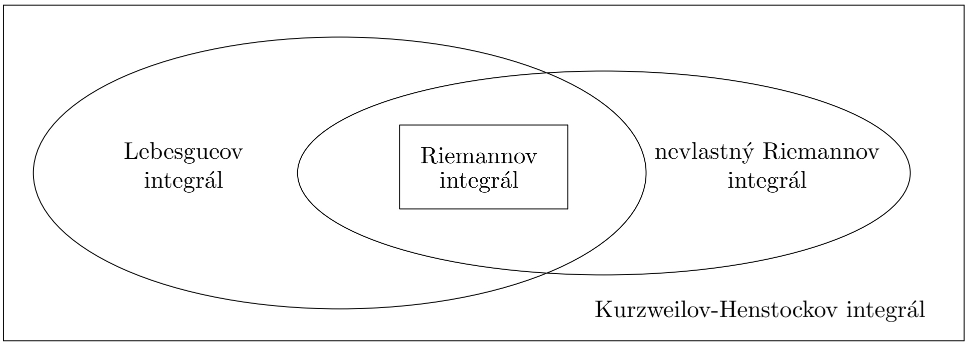
(vii) Keďže Lebesgueov integrál prevyšuje Riemannov v niektorých aspektoch, do polovice 20. storočia sa dostala Riemannova konštrukcia integrálu do úzadia. Určité znovuzrodenie tejto myšlienky nastalo v druhej polovici 20. storočia, keď Ralph Henstock[15] v roku 1955 a nezávisle český matematik Jaroslav Kurzweil[16] v roku 1957 našli oveľa jednoduchšiu formuláciu Denjoyovho-Perronovho integrálu. V skutočnosti je Kurzweilova-Henstockova myšlienka omnoho jednoduchšia ako Lebesgueova a ich definícia integrálu (dnes označovaný ako *Kurzweilov-Henstockov integrál*, skrátene $\mathscr{K}\mathscr{H}$-integrál) sa iba nepatrne líši od Riemannovej-Cauchyho definície integrálu. Touto myšlienkou je nahradiť číslo $\delta > 0$ v tejto definícii (viď Definíciu 3.33 a poznámky za ňou) funkciou $\delta : \langle a, b\rangle \to (0, +\infty)$ (tzv. *gauge function*). Výsledný pojem integrálu je „Riemannovsky jednoduchý“, ale jeho sila je „super-Lebesgueova“. Na záver uveďme malé zhrnutie uvedených poznámok vo Vennovom diagrame, ktorý popisuje inklúzie medzi triedami $\mathscr{R}$-integrovateľných, $\mathscr{L}$-integrovateľných, $\mathscr{K}\mathscr{H}$-integrovateľných funkcií a funkcií majúcich nevlastný $\mathscr{R}$-integrál. Ako zobrazuje Vennov diagram na Obr. 3.17, nie každá $\mathscr{L}$-integrovateľná funkcia je $\mathscr{R}$-integrovateľná, ani nemusí mať nevlastný $\mathscr{R}$-integrál. Jednoduchým príkladom je Dirichletova funkcia χ. Taktiež nie každá funkcia, ktorá má nevlastný $\mathscr{R}$-integrál, má aj $\mathscr{L}$-integrál. Príkladom takejto funkcie je funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Keďže nepoznáme ani definíciu $\mathscr{L}$-integrálu, a zatiaľ ani nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu, nebudeme sa tým bližšie zaoberať. Ako zaujímavosť ešte spomenieme, že istá skupina matematikov (prevažne na zahraničných univerzitách) preferuje $\mathscr{K}\mathscr{H}$-integrál vo výučbe ako prvý integrál, s ktorým by sa študenti mali stretnúť. Záujemcov o túto problematiku môžeme odkázať na knihu [4].

(viii) S ďalším rozvojom funkcionálnej analýzy sa v 20. storočí objavilo množstvo konštrukcií integrálov založených jednak na zovšeobecnení $\mathscr{R}$-integrálu a $\mathscr{L}$-integrálu vo všeobecnejších priestoroch, ale existujú aj iné integrály, ktoré idú za rámec týchto dvoch spomínaných integrálov istým spôsobom súvisiacich s reálnou osou a jej prirodzenými operáciami sčítania a násobenia. Podľa našich zistení dnes existuje viac

[13] Arnaud Denjoy (1884–1974), čítaj „Denžoa“
[14] Oskar Perron (1880–1975)
[15] Ralph Henstock (1923–2007), čítaj „Henstok“
[16] Jaroslav Kurzweil (1926–), čítaj „Kurcvajl“



Obr. 3.17: Diagram množín integrovateľných funkcií

ako 80 rôznych integrálov! Za všetky spomeňme dva takéto integrály vytvorené slovenskými matematikmi: prvý bol vytvorený v roku 1970 Ivanom Dobrakovom[17], ktorý je úplným zovšeobecnením $\mathscr{L}$-integrálu v Banachových priestoroch vzhľadom na operátorovú hodnotovú mieru (nič si z toho nerobte, ak tejto vete vôbec nerozumiete!). Druhý významný integrál, ktorý uzrel svetlo sveta v našich končinách, patrí Jánovi Šipošovi[18]. Ako sme v prvej poznámke uviedli, v axiomatike $\mathscr{R}$-integrálu sa priamo vyskytuje aditivita ako nevyhnutná vlastnosť tohto integrálu. V rôznych procesoch (napr. v rozhodovaní) aditivita modeluje neinteraktivitu, a preto v mnohých reálnych problémoch má svoje limity. Na druhej strane neaditivita znemožňuje používanie klasických integrálov ako sú Riemannov, Lebesgueov či Lebesgueov-Stieltjesov. Integrovanie vzhľadom na neaditívne miery má dlhú históriu, ale asi najcitovanejší je Choquetov[19] integrál (zavedený pomocou $\mathscr{R}$-integrálu a majúci veľa súvislostí s klasickým $\mathscr{L}$-integrálom). Šipoš v roku 1979 vybudoval nový typ integrálu, nezávisle na iných konštrukciách, ktorý sa pre nezáporné funkcie zhoduje so Choquetovým integrálom, a často sa nazýva aj symetrický Choquetov integrál. Len pre zaujímavosť uveďme, že tento integrál poskytol matematický základ pre prácu Kahnemana a Tverského v ekonómii, za ktorú dostali v roku 2002 Nobelovu cenu.

[17] Ivan Dobrakov (1940–1997)
[18] Ján Šipoš (1947–)
[19] Gustave Choquet (1915–2006), čítaj „Šoket“

Kapitola 4

Aplikácie určitého integrálu

Cieľom tejto kapitoly je uviesť niektoré z aplikácií určitého integrálu, s ktorými sa môžeme stretnúť pri riešení rôznych problémov. My sa hlavne budeme zaoberať geometrickými aplikáciami. V podstate pôjde o to, aby sme geometrickú veličinu dobre definovali a potom ukázali, že sa dá počítať pomocou $\mathscr{R}$-integrálu. Prístupy k tejto úlohe sú rôzne. V tejto časti uvedieme základ jednej takej metódy, ktorá sa opiera o aditívne funkcie intervalu a je pomerne jednoduchá a dostatočne názorná. Neskôr spomenieme aj iný prístup.

Definícia 4.1. Nech $\langle a, b\rangle$ je interval. Reálnu funkciu φ definovanú na množine všetkých podintervalov intervalu $\langle a, b\rangle$ takú, že pre každé $u, w, v \in \langle a, b\rangle$, $u < v \ < w$, platí

$$\varphi(\langle u, w\rangle) = \varphi(\langle u, v\rangle) + \varphi(\langle v, w\rangle)$$

nazývame *aditívnou funkciou intervalu* na $\langle a, b\rangle$.

Príklad 4.2. 1.) Ak $f \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a pre $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ položíme

$$\varphi(\langle u, v\rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x,$$

potom z aditivity $\mathscr{R}$-integrálu máme, že φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$.

2.) Nech $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia. Potom pre $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ funkcia $\varphi(\langle u, v\rangle) = g(v) - g(u)$ je aditívnou funkciou intervalu na $\langle a, b\rangle$, pretože pre $u < v < w$ máme

$$\varphi(\langle u, w\rangle) = g(w) - g(u) = (g(w) - g(v)) + (g(v) - g(u)) = \varphi(\langle u, v\rangle) + \varphi(\langle v, w\rangle).$$

Ak φ je aditívnou funkciou intervalu na $\langle a, b\rangle$, potom matematickou indukciou ľahko dokážeme (urobte to!), že pre každé $D \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ s deliacimi bodmi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\varphi(\langle a, b\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\langle x_{i-1}, x_i\rangle).$$

Poznámka 4.3. Ako uvádza predchádzajúci príklad, $\mathscr{R}$-integrál je aditívnou funkciou intervalu. Mohli by sme sa teda pýtať, či každú aditívnu funkciu intervalu vieme vyjadriť pomocou integrálu. Ukážeme, že nie. Naozaj, nech

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -1, 0) \\ 1, & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

a pre $\langle u, v \rangle \subseteq \langle -1, 1 \rangle$ uvažujeme aditívnu funkciu intervalu $\varphi(\langle u, v \rangle) = g(v) - g(u)$, t.j.

$$\varphi(\langle u, v \rangle) = \begin{cases} 1, & 0 \in (u, v\rangle \\ 0, & 0 \notin (u, v\rangle \end{cases}.$$

Predpokladajme, že existuje $f \in \mathscr{R}\langle -1, 1 \rangle$ taká, že $\varphi(\langle u, v \rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$ pre každé $\langle u, v \rangle \subseteq \langle -1, 1 \rangle$. Potom pre $x \in (-1, 1\rangle$ platí

$$g(x) - g(-1) = g(x) = \varphi(\langle -1, x \rangle) = (\mathscr{R}) \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

čo ale znamená, že funkcia g, ktorá nie je spojitá v bode $x_0 = 0$, sa rovná funkcii $(\mathscr{R}) \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, ktorá je podľa fundamentálnej vety integrálneho kalkulu spojitou funkciou na intervale $\langle -1, 1 \rangle$, čo je spor. Preto k aditívnej funkcii φ neexistuje taká funkcia $f \in \mathscr{R}\langle -1, 1 \rangle$, aby sa φ dala reprezentovať $\mathscr{R}$-integrálom.

Pre istú triedu aditívnych funkcií intervalu však je možné reprezentovať aditívnu funkciu pomocou integrálu.

Definícia 4.4. Hovoríme, že aditívna funkcia φ na $\langle a, b \rangle$ je *mediálna vzhľadom na reálnu funkciu* f definovanú na $\langle a, b \rangle$, akk f je taká, že

$$m(v - u) \leq \varphi(\langle u, v \rangle) \leq M(v - u)$$

pre každý $\langle u, v \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$, kde $m = \inf\limits_{x \in \langle u, v \rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle u, v \rangle} f(x)$.

$\mathscr{R}$-integrál uvažovaný ako funkcia intervalu $\langle u, v \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ (viď Príklad 4.2) je mediálna funkcia vzhľadom na funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$. Aká musí byť funkcia g z Príkladu 4.2, aby zadaná funkcia φ bola mediálna? (dokážte, že ak má ohraničenú deriváciu, tak φ je mediálna vzhľadom na g'!)

Teraz uvedieme vetu, ktorá nám výrazne zjednoduší cestu za geometrickými aplikáciami.

Veta 4.5 (o reprezentácii mediálnej aditívnej funkcie intervalu). *Nech φ je aditívna funkcia intervalu na $\langle a, b \rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na funkciu $f \in \mathscr{R}\langle a, b \rangle$. Potom pre každý interval $\langle u, v \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ platí*

$$\varphi(\langle u, v \rangle) = (\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Nech $\langle u, v \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ a nech $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle u, v \rangle$. Z aditivity funkcie φ máme

$$\varphi(\langle u, v \rangle) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\langle x_{i-1}, x_i \rangle)$$

a z predpokladu mediálnosti pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $m_i \Delta x_i \leq \varphi(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \leq M_i \Delta x_i$, kde $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ a $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$. Sčítaním cez všetky čiastočné intervaly dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

t.j. $s(f, D) \leq \varphi(\langle u, v\rangle) \leq S(f, D)$. Keďže D je ľubovoľné delenie, potom

$$(\mathscr{R})\underline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \varphi(\langle u, v\rangle) \leq (\mathscr{R})\overline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a z $\mathscr{R}$-integrovateľnosti funkcie f máme

$$(\mathscr{R})\underline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\overline{\int_u^v} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

teda $(\mathscr{R}) \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(\langle u, v\rangle)$. □

Podstata použitia metódy aditívnych funkcií na geometrické aplikácie bude teraz jednoduchá: hneď ako sa o nejakej veličine presvedčíme, že je aditívnou funkciou intervalu a nájdeme takú reálnu funkciu, vzhľadom na ktorú je mediálna, použijeme na jej výpočet Vetu 4.5. To, či je daná funkcia aditívna a vzhľadom na akú funkciu je mediálna, odpozorujeme z praxe, čiže danú situáciu matematicky modelujeme. V našom prípade však bude model veľmi jednoduchý.

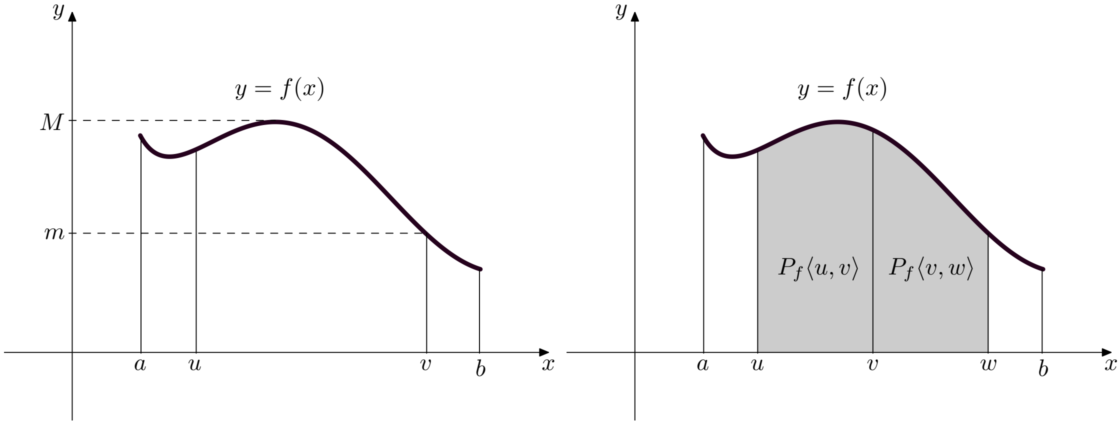
4.1 Plošný obsah rovinného útvaru

Ak sa dobre pozrieme na motivačné príklady z úvodov oboch predchádzajúcich kapitol, išlo nám o riešenie rovnakej úlohy, t.j. o určenie obsahu plochy pod grafom funkcie, čo sme chápali intuitívne. Teraz sa prepracujeme k presnej definícii tohto pojmu a presvedčíme sa opäť o tom, čo už vieme, a teda, že integrál bude tým nástrojom, pomocou ktorého sa dá zvládnuť táto úloha.

Nech je teda daná nezáporná spojitá funkcia f na intervale $\langle a, b\rangle$. Máme vypočítať plošný obsah útvaru ohraničeného grafom funkcie f a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (viď Obr. 4.1). Predpokladajme najprv, že taký obsah vieme vypočítať. Potom ho ale vieme vypočítať nad každým intervalom $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$, označme $P_f\langle u, v\rangle$. Zo skúsenosti vieme, že by pre takýto obsah malo platiť $P_f\langle u, v\rangle + P_f\langle v, w\rangle = P_f\langle u, w\rangle$ pre $u < v < w$, kde $u, v, w \in \langle a, b\rangle$. Takto sme ale definovali aditívnu funkciu P_f na $\langle a, b\rangle$ (píšeme $P_f\langle u, v\rangle$ namiesto $P_f(\langle u, v\rangle)$). Z praxe ale vieme ešte o jednej vlastnosti, ktorú by táto funkcia mala mať. Ak opäť označíme $m = \inf\limits_{x \in \langle u, v\rangle} f(x)$ a $M = \sup\limits_{x \in \langle u, v\rangle} f(x)$, je prirodzené žiadať (pozri Obr. 4.1), aby

$$m(v - u) \leq P_f\langle u, v\rangle \leq M(v - u),$$

t.j. plošný obsah vpísaného obdĺžnika do istého útvaru by nemal byť väčší ako plošný obsah toho útvaru. Podobne je to s opísaným obdĺžnikom. V zmysle Definície 4.4 táto požiadavka hovorí len to, že P_f je mediálna vzhľadom na f. Preto môžeme vysloviť nasledujúcu definíciu.



Obr. 4.1: Obsah plochy pod grafom funkcie

Definícia 4.6. *Plošným obsahom* útvaru ohraničeného grafom funkcie f a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ nazývame hodnotu $P_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie intervalu na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f.

Odtiaľto hneď máme výsledok, ktorý očakávame v súvislosti s výpočtom tohto plošného obsahu.

Veta 4.7. *Nech f je nezáporná spojitá funkcia definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom plošný obsah $P_f\langle a, b\rangle$ útvaru určeného jej grafom a priamkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ existuje a platí*

$$P_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. To, že aditívna funkcia P_f na $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na f, existuje, je zrejmé, pretože $\mathscr{R}$-integrál ako funkcia intervalu na $\langle a, b\rangle$ takou funkciou je. To, že to nemôže byť iná funkcia, vyplýva z Vety 4.5. □

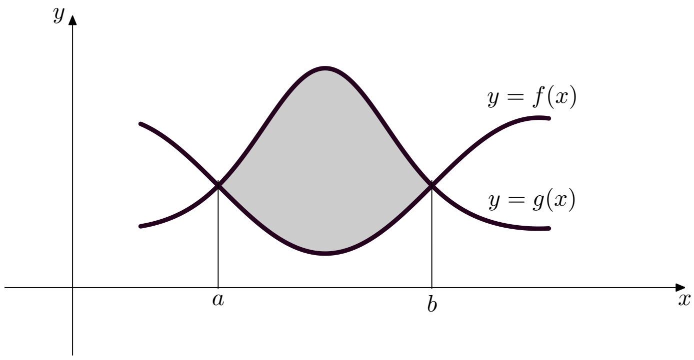
Poznamenajme, že vzhľadom na použitú spojitú funkciu je daný integrál aj Newtonovým integrálom, čo sa zhoduje s úvahou urobenou v úvode Kapitoly 1.

Dôsledok 4.8. Ak f a g sú spojité funkcie na $\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \le g(x)$, potom plošný obsah $P_{f,g}$ útvaru ohraničeného grafom funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ je

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Pre $x \in \langle a, b\rangle$ stačí položiť $h(x) = g(x) - f(x)$ a použiť Vetu 4.7. □

Príklad 4.9. Určte plošný obsah kruhu ohraničeného kružnicou s rovnicou $x^2 + y^2 = r^2$. Stačí nám teda uvažovať funkciu $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervale $\langle -r, r\rangle$. Potom



Obr. 4.2: Obsah plochy ohraničenej grafmi dvoch funkcií

podľa Vety 4.7 máme, že plošný obsah kruhu je

$$\begin{aligned} 2(\mathscr{R})\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= -2(\mathscr{N})\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\,r\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= 2r^2(\mathscr{N})\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = 2r^2\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi r^2, \end{aligned}$$

kde pri výpočte sme použili vzťah s $\mathscr{N}$-integrálom a substitúciu $x = r\cos t$, $t \in \mathbb{R}$ (porovnajte s výpočtom obsahu kruhu urobeným v Kapitole 2).

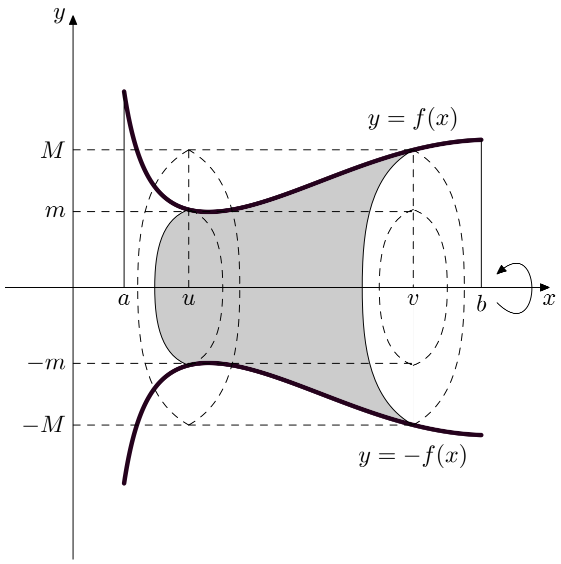
Príklad 4.10. Určte plošný obsah útvaru ohraničeného grafmi funkcií $y = 2x - x^2$ a $y = -x$. Keďže $\langle a, b\rangle = \langle 0, 3\rangle$ (zdôvodnite!) a pre každé $x \in \langle 0, 3\rangle$ platí $2x - x^2 \geq -x$, potom podľa Dôsledku 4.8 máme

$$P_{f,g}\langle a, b\rangle = (\mathscr{R})\int_0^3 (2x - x^2 + x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_0^3 (3x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

4.2 Objem rotačného telesa

Postup, ktorým sme riešili otázku plošného obsahu nám umožní riešiť aj iné úlohy geometrickej povahy. Našou ďalšou úlohou je vypočítať objem telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x, viď Obr. 4.3. Pri rotácii plochy určenej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ nechajme rotovať obdĺžnik so základňou $m = \inf_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$ a obdĺžnik so základňou $M = \sup_{x\in\langle u,v\rangle} f(x)$, kde $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$, viď Obr. 4.3. Ich rotáciou okolo osi o_x dostaneme valec vpísaný do časti rotačného telesa nad intervalom $\langle u, v\rangle$, ktorý má objem $\pi m^2(v-u)$ a valec opísaný v tej časti s objemom $\pi M^2(v-u)$, viď Obr. 4.3. Ak označíme $V_f\langle u, v\rangle$ objem časti rotačného telesa nad ľubovoľným intervalom $\langle u, v\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$, je prirodzené žiadať, aby $\pi m^2(v-u) \leq V_f\langle u, v\rangle \leq \pi M^2(v-u)$, čo však znamená, že aditívna funkcia V_f je mediálna vzhľadom na funkciu πf^2. Z týchto úvah vyslovíme nasledujúcu definíciu a vetu o výpočte objemu rotačného telesa.

Definícia 4.11. *Objemom rotačného telesa* vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ nazývame hodnotu $V_f\langle a, b\rangle$ aditívnej funkcie V_f na intervale $\langle a, b\rangle$, ktorá je mediálna vzhľadom na funkciu πf^2.



Obr. 4.3: Určenie objemu rotačného telesa

Veta 4.12. *Nech f je nezáporná spojitá funkcia definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom objem $V_f\langle a, b\rangle$ rotačného telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej funkciou f na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x existuje a platí*

$$V_f\langle a, b\rangle = \pi\,(\mathscr{R}) \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz. Analogický ako vo Vete 4.7. □

Dôsledok 4.13. Ak f a g sú spojité funkcie na $\langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \le g(x)$, potom objem $V_{f,g}$ rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej grafmi funkcií f a g na intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi\,(\mathscr{R}) \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

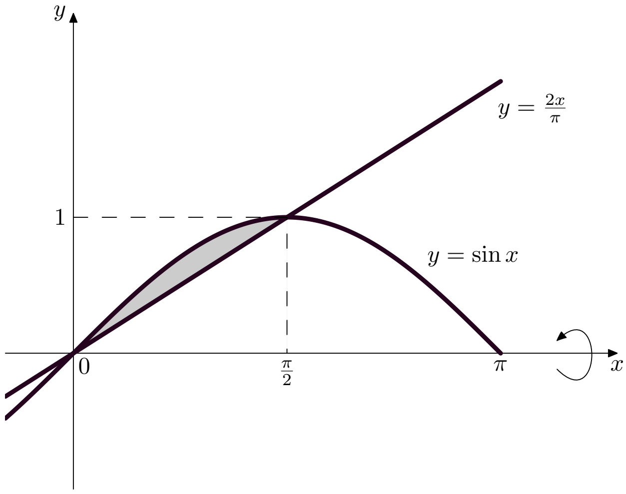
Príklad 4.14. Určte objem telesa, ktoré vznikne pri rotácii kriviek $y = \sin x$ a $y = \frac{2x}{\pi}$, $x > 0$, okolo osi o_x. Vzniknutý útvar je znázornený na Obr. 4.4, preto podľa Dôsledku 4.13 máme

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = \pi\,(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \mathrm{d}x = \pi\,(\mathscr{N}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{4x^3}{3\pi^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Poznámka 4.15. Môžeme taktiež uvažovať situáciu, keď vzniknutú plochu (ako v Dôsledku 4.13) necháme rotovať okolo osi o_y. V takom prípade (nebudeme to odvádzať, ale prezradíme, že to súvisí s popisovaním množín pomocou elementárnych oblastí) objem $V_{f,g}$ takto vzniknutého rotačného telesa vypočítame nasledovne

$$V_{f,g}\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R}) \int_a^b x(g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 4.4: Určenie objemu rotačného telesa z Príkladu 4.14

4.3 Dĺžka rovinnej krivky

Našou ďalšou úlohou je vypočítať dĺžku rovinnej krivky. Použitie Vety 4.5 pre tento výpočet nie je už také bezprostredné ako pri predchádzajúcich aplikáciách, hoci sa to dá ukázať aj pomocou aditívnej funkcie intervalu. Z tohto dôvodu, ale najmä preto, aby sme uviedli aj inú metódu, zvolíme teraz iný prístup, ktorý bude priamo využívať konštrukciu $\mathscr{R}$-integrálu.

Predpokladajme, že je daná rovinná krivka grafom funkcie f definovanej na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech f má spojitú deriváciu na $\langle a, b\rangle$ (túto požiadavku zdôvodníme neskôr, ale ako uvidíme, bude prirodzenou vzhľadom na uvažovaný prístup). Ak $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, vieme vytvoriť lomenú čiaru spájajúcu body $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$, viď Obr. 4.5. Jej dĺžka

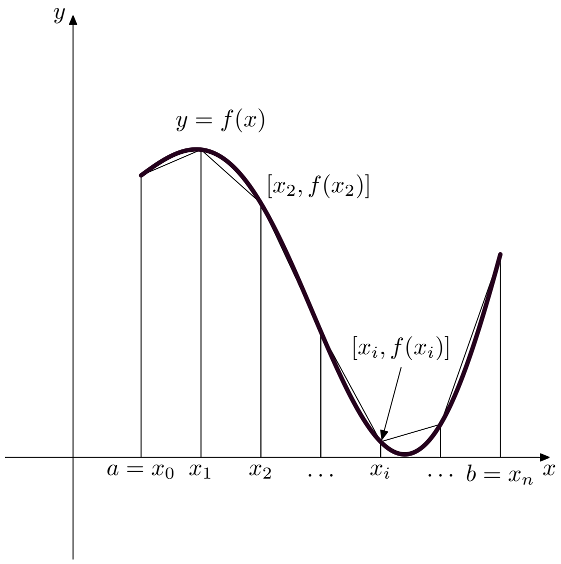
$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

(použili sme určenie vzdialenosti dvoch bodov v rovine) aproximuje to, čo si intuitívne predstavujeme pod dĺžkou krivky danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$. Preto je prirodzená nasledujúca definícia.

Definícia 4.16. Nech $f \in \mathscr{C}^1\langle a, b\rangle$ a $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ je normálna postupnosť delení. Ak δ_n je dĺžka lomenej čiary utvorenej pomocou delenia D_n a funkcie f, potom číslo $L_f\langle a, b\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n$ nazývame *dĺžkou krivky* danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 4.17. *Nech $f \in \mathscr{C}^1\langle a, b\rangle$. Potom dĺžka krivky $L_f\langle a, b\rangle$ danej grafom funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ existuje a platí*

$$L_f\langle a, b\rangle = (\mathscr{R}) \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$



Obr. 4.5: Výpočet dĺžky rovinnej krivky

Dôkaz. Nech $D_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je ekvidištančné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

je dĺžka lomenej čiary utvorenej pomocou delenia D_n a funkcie f. Keďže f je spojitá na každom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, potom podľa Lagrangeovej vety existujú $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ také, že $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, a teda

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(\xi_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

To znamená, že δ_n nie je nič iné ako integrálny súčet prislúchajúci funkcii $\sqrt{1 + (f')^2}$, deleniu D_n a výberu reprezentantov Ξ_n delenia D_n. Ak teraz uvážime, že f' je spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak $f' \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$ a tiež $\sqrt{1 + (f')^2} \in \mathscr{R}\langle a, b\rangle$. Potom podľa Vety 3.35 pre normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty \in \mathscr{D}\langle a, b\rangle$ a výber reprezentantov Ξ_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D_n, \Xi_n)$ a platí

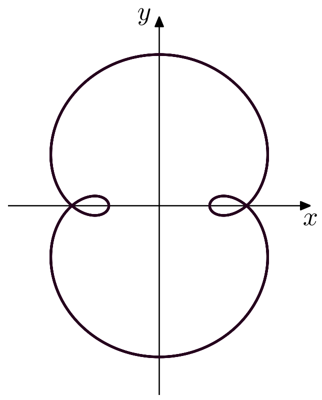
$$L_f\langle a, b\rangle = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D_n, \Xi_n) = (\mathscr{R}) \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x,$$

čo sme chceli dokázať. □

Príklad 4.18. Vypočítajte dĺžku rovinnej krivky určenej grafom funkcie $y = \ln\cos x$ na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$. Použitím práve odvodeného vzorca má hľadaná dĺžka hodnotu

$$(\mathscr{R}) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\, x}\, \mathrm{d}x = (\mathscr{N}) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \left[\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}$$

(zdôvodnite všetky kroky výpočtu!).



Obr. 4.6: Príklad rovinnej krivky, ktorá nie je grafom funkcie

Prístup, ktorý sme použili na výpočet dĺžky rovinnej krivky, možno zovšeobecniť rôznymi smermi. Jedno zovšeobecnenie súvisí so samotným pojmom krivky. Zdá sa byť dosť obmedzujúce uvažovať krivku iba ako graf funkcie (spĺňajúcej isté vlastnosti) na intervale $\langle a, b\rangle$. Tento prístup je veľmi špeciálny, pretože už veľmi jednoduché krivky nie sú takého tvaru (viď napr. Obr. 4.6). S podobnými príkladmi kriviek sa môžeme stretnúť napríklad vo fyzike pri skúmaní trajektórie hmotného bodu. Ak by sme potom chceli určiť dráhu, ktorú tento hmotný bod prešiel, Veta 4.17 by nám v tom nepomohla. Našou úlohou nie je zaoberať sa podrobnou diskusiou takých prípadov. Uvedieme len ako fakt jednu všeobecnejšiu situáciu. Prístup k odvodeniu vzorca, ktorý tu uvedieme, by bol podobný ako v prípade krivky danej grafom funkcie.

Definícia 4.19. Množinu bodov $[x, y]$ nazývame *parametricky danou rovinnou krivkou* C, akk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde φ a ψ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$ majúce spojité derivácie φ' a ψ' na $\langle \alpha, \beta\rangle$.

Príklad 4.20. Rovnice

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

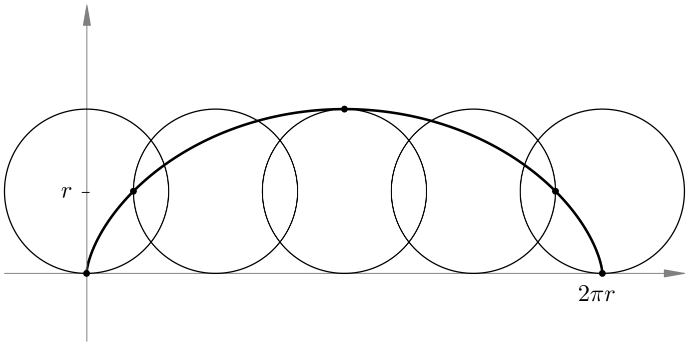
sú parametrickým vyjadrením kružnice so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 2 (overte!). Krivka na Obr. 4.6 sa nazýva *nefroida* a je zadaná parametricky nasledovne

$$x = a(3\cos t - \cos 3t), \quad y = a(3\sin t - \sin 3t), \quad a > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade by sme definovali pojem dĺžky L_C takejto krivky a pre jej výpočet by sme dostali nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.21. *Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom pre dĺžku $L_C\langle \alpha, \beta\rangle$ krivky C na $\langle \alpha, \beta\rangle$ platí*

$$L_C\langle \alpha, \beta\rangle = (\mathscr{R}) \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$



Obr. 4.7: Graf cykloidy

Príklad 4.22. Vypočítajte dĺžku cykloidy, viď Obr. 4.7 danej parametricky na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$ rovnicami

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad r > 0.$$

Priamym dosadením do predchádzajúceho vzorca dostávame

$$L_C\langle \alpha, \beta\rangle = (\mathscr{R}) \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = r\,(\mathscr{R}) \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2r\,(\mathscr{N}) \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -4r\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

4.4 Plošný obsah rotačnej plochy

Už vieme, že pomocou integrálu dokážeme určiť a vypočítať objem rotačného telesa (v prípade rotácie okolo osi o_x aj o_y). Preto nám môže napadnúť otázka, či by sme nemohli vypočítať aj povrch takého telesa, kde pod povrchom takého rotačného telesa rozumieme iba jeho plášť, teda časť povrchu bez kruhových podstáv. Venujme sa teda výpočtu povrchu rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_x, viď Obr. 4.3. Vzorce pre teleso vzniknuté rotáciou okolo osi o_y si môže záujemca odvodiť sám.

Nebudeme sa zaoberať podrobnosťami celej konštrukcie, ale analogicky predchádzajúcim častiam by sme definovali povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky danej grafom funkcie so spojitou deriváciou na intervale $\langle a, b\rangle$ (zdôvodnenie pozri v časti objem rotačného telesa) okolo osi o_x ako limitu cez povrch rotačných telies vytvorených lomenými čiarami (pozri časť dĺžka krivky). Teda kombináciou oboch prístupov dostávame nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.23. *Plošný obsah S_f rotačného telesa vytvoreného rotáciou krivky danej grafom funkcie f so spojitou deriváciou na $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x je daný vzorcom*

$$S_f\langle a, b\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R}) \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Príklad 4.24. Vypočítajte plošný obsah rotačnej plochy určenej funkciou $y = \frac{x^3}{3}$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$. Dosadením do vzorca dostávame

$$\begin{aligned} S_f\langle a,b\rangle &= 2\pi\,(\mathscr{R})\int_0^2 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi\,(\mathscr{N})\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\pi\,(\mathscr{N})\int_1^{17}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\pi\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^{17} = \frac{1}{9}\pi(17\sqrt{17}-1), \end{aligned}$$

kde sme využili substitúciu $1 + x^4 = t$.

Taktiež ako v prípade dĺžky rovinnej krivky je možné vysloviť všeobecnejšie tvrdenie pre plošný obsah rotačného telesa vytvoreného rotáciou parametricky zadanej rovinnej krivky.

Veta 4.25. *Nech C je parametricky zadaná rovinná krivka rovnicami $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$, kde φ a ψ majú na $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojité derivácie φ' a ψ'. Potom pre plošný obsah $S_C\langle\alpha,\beta\rangle$ rotačnej plochy vytvorenej rotáciou krivky C okolo osi o_x platí*

$$S_C\langle\alpha,\beta\rangle = 2\pi\,(\mathscr{R})\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 4.26. Vypočítajte plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou krivky C danou rovnicami $x = \mathrm{e}^t\sin t$, $y = \mathrm{e}^t\cos t$ okolo osi o_x na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadením do vzorca dostávame

$$\begin{aligned} S_C\langle\alpha,\beta\rangle &= 2\pi\,(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos t\sqrt{(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\,(\mathscr{R})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos t\sqrt{2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\,\pi\,(\mathscr{N})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{2}\,\pi\left[\frac{\mathrm{e}^{2t}(\sin t+2\cos t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(\mathrm{e}^\pi-2), \end{aligned}$$

kde na výpočet $\mathscr{N}$-integrálu sme využili metódu per partes.

Na záver len skonštatujeme, že možných aplikácií určitého integrálu je omnoho viac, nedotkli sme sa žiadnych fyzikálnych, kde sa určitý integrál bežne používa na výpočet práce, hmotnosti telesa, hustoty, momentu zotrvačnosti, ťažiska telesa a pod. S týmito a ďalšími aplikáciami sa študenti môžu oboznámiť napr. v rôznych kurzoch fyziky.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami:

(a) krivkami $y = x^2$ a $y = x^3$;

(b) parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$;

(c) krivkami $y = \sin x$ a $y = \cos x$ pre $x \in \langle\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle$;

(d) parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y.

$\diamond$ Vypočítajte objem elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$\diamond$ Vypočítajte objemy telies určených rotáciou rovinných oblastí ohraničených danými krivkami okolo osi o_x:

(a) parabolou $y = x^2$ a priamkou $y = 4$;

(b) krivkami $y = \sin x,\ y = \cos x$ a osou o_y v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$;

(c) krivkami $y = x^2$ a $x = y^2$;

(d) kružnicou $x^2 + y^2 = 1$ a parabolou $y^2 = \frac{3}{2}x$.

$\diamond$ Nájdite vzorec pre objem pravidelného ihlana s obsahom podstavy P a výškou h.

$\diamond$ Vypočítajte dĺžky zadaných rovinných kriviek:

(a) $y = \ln(\sin x)$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$;

(b) $y = \cosh x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$;

(c) $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$;

(d) $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$\diamond$ Vypočítajte obsahy povrchov rotačných plôch, ktoré vzniknú rotáciou danej krivky okolo osi o_x:

(a) $y = 2 \cosh \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$;

(b) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$;

(c) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;

(d) $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$, $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$;

(e) $x = a \sin 2t$, $y = 2a \sin^2 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle,\ a > 0$.

$\diamond$ Odvoďte vzorec pre výpočet povrchu gule s polomerom r.

Kapitola 5

Nevlastný Riemannov integrál

Dôležitým predpokladom pre definovanie $\mathscr{R}$-integrálu reálnej funkcie jednej premennej bola ohraničenosť funkcie definovanej na ohraničenom intervale (zopakujme, že ohraničenosť funkcie bola len nutnou podmienkou jej $\mathscr{R}$-integrovateľnosti). Takýto $\mathscr{R}$-integrál sa označuje tiež *vlastný* $\mathscr{R}$*-integrál* a ak existuje vlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, potom sme funkciu f nazvali $\mathscr{R}$-integrovateľnou na intervale $\langle a, b\rangle$. Prirodzene vzniká otázka, či je možné rozšíriť pojem určitého integrálu aj na ohraničené funkcie definované na neohraničenom intervale alebo na neohraničené funkcie definované na ohraničenom intervale. V tejto kapitole ukážeme, ako sa to dá urobiť, no hlbšiu teóriu takýchto integrálov nebudeme rozvíjať. Tieto integrály budeme označovať spoločným názvom *nevlastné* $\mathscr{R}$*-integrály*.

Vráťme sa na chvíľu k určitému $\mathscr{R}$-integrálu funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < +\infty$, t.j. uvažujme

$$(\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Z existencie tohto $\mathscr{R}$-integrálu máme, že funkcia $F(\xi) = (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ (pozri Veta 3.71), špeciálne v bode b je spojitá zľava, teda $\lim\limits_{\xi\to b^-} F(\xi) = F(b)$, t.j

$$\lim_{\xi\to b^-} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

resp. funkcia $F(\xi) = (\mathscr{R}) \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá sprava v bode a, teda $\lim\limits_{\xi\to b^-} F(\xi) = F(a)$, t.j.

$$\lim_{\xi\to a^+} (\mathscr{R}) \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

Ak niektorú z podmienok – ohraničenosť intervalu $\langle a, b\rangle$ alebo ohraničenosť funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ – porušíme, tak sa môže stať, že vlastná limita na ľavej strane (5.1), resp. (5.2), existuje aj keď určitý $\mathscr{R}$-integrál vpravo v pôvodnom zmysle predchádzajúcej kapitoly neexistuje. V tom prípade rozšírime pojem $\mathscr{R}$-integrálu tak, že zoberieme vzťah (5.1), resp. (5.2), za definíciu nového integrálu, čo je základná myšlienka definície nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu. Pozrime sa teraz detailnejšie na jednotlivé prípady.

5.1 $\mathscr{R}$-integrál na neohraničenom intervale

Množina $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ obsahuje tri súvislé neohraničené podmnožiny:

(i) interval $\langle a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$;

(ii) interval $(-\infty, a\rangle$, $a \in \mathbb{R}$;

(iii) celý interval $(-\infty, +\infty)$.

Naše ďalšie úvahy zúžime iba na interval $\langle a, +\infty)$, pretože analogicky sa dá postupovať v prípade (ii). Posledným prípadom sa budeme zaoberať neskôr.

Definícia 5.1. Nech f je definovaná na intervale $\langle a, +\infty)$ a $f \in \mathscr{R}\langle a, \xi\rangle$ pre každé $\xi \geq a$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na intervale $\langle a, +\infty)$ *existuje* (resp. *konverguje*), akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to+\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$. Vtedy kladieme

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

Ak limita $\lim\limits_{\xi\to\infty} (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje alebo je nevlastná, vtedy hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál (5.3) *diverguje*.

Poznámka 5.2. Inými slovami: keďže $f \in \mathscr{R}\langle a, \xi\rangle$ pre každé $\xi \geq a$, tak existuje $F(\xi) = (\mathscr{R}) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to\infty} F(\xi)$, potom

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty} F(\xi).$$

Ak na vyjadrenie limity funkcie $F(\xi)$ použijeme jazyk postupností, môžeme nevlastný $\mathscr{R}$-integrál na neohraničenom intervale vyjadriť ako súčet radu, t.j.

$$(\mathscr{R}) \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $(\xi_n)_0^\infty$ je postupnosť taká, že $\xi_0 = a$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\xi_n > a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$. Potom je zrejmé, že pre konvergenciu nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu je nutné a postačujúce, aby rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathscr{R}) \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergoval pre ľubovoľnú postupnosť $(\xi_n)_0^\infty$ s vlastnosťou $\xi_0 = a$, $\xi_n > a$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$. Táto vlastnosť nám umožňuje využiť pri zisťovaní konvergencie alebo divergencie nevlastných $\mathscr{R}$-integrálov mnohé kritériá konvergencie alebo divergencie radov (pozri poznámky v závere kapitoly).

Poznámka 5.3. Podobne definujeme nevlastný $\mathscr{R}$-integrál na intervale $(-\infty, a\rangle$. Nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, a\rangle$ a $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom intervale $\langle \xi, a\rangle$ pre $\xi \leq a$. Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{\xi\to-\infty} (\mathscr{R}) \int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x$, tak nevlastný $\mathscr{R}$-integrál sa nazýva konvergentný a platí

$$(\mathscr{R}) \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to-\infty} (\mathscr{R}) \int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V opačnom prípade sa nazýva divergentný.

Príklad 5.4. Vyšetrite konvergenciu nevlastného integrálu $(\mathscr{R})\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$. Keďže sínus je spojitá funkcia na každom intervale $\langle 0,\xi\rangle$ pre $\xi>0$, potom je podľa Vety 3.41 $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom intervale $\langle 0,\xi\rangle$, a teda

$$(\mathscr{R})\int_0^\xi \sin x \,\mathrm{d}x = (\mathscr{N})\int_0^\xi \sin x \,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\xi = 1-\cos\xi .$$

Keďže $\lim\limits_{\xi\to\infty}(1-\cos\xi)$ neexistuje, daný nevlastný $\mathscr{R}$-integrál diverguje.

Príklad 5.5. Zistite, pre aké reálne hodnoty $\alpha>0$ konverguje nevlastný $\mathscr{R}$-integrál

$$(\mathscr{R})\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \qquad a>0.$$

Keďže funkcia $x^{-\alpha}$ je $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom intervale $\langle a,\xi\rangle$, $0<a<\xi$, tak platí

$$(\mathscr{R})\int_a^\xi \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = (\mathscr{N})\int_a^\xi \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_a^\xi & \text{ak} \quad \alpha\neq 1\,, \\ [\ln x]_a^\xi & \text{ak} \quad \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Limitou pre $\xi\to\infty$ dostaneme

$$(\mathscr{R})\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{ak} \quad \alpha>1\,, \\ +\infty & \text{ak} \quad 0<\alpha\leq 1\,, \end{cases}$$

čo znamená, že daný $\mathscr{R}$-integrál konverguje pre $\alpha>1$ a diverguje pre $0<\alpha\leq 1$.

5.2 $\mathscr{R}$-integrál z neohraničenej funkcie na ohraničenom intervale

Teraz sa budeme zaoberať prípadom neohraničenej funkcie na ohraničenom intervale.

Definícia 5.6. Nech funkcia f je definovaná na intervale $\langle a,b)$, a, $b\in\mathbb{R}$ a je neohraničená na intervale $(b-\delta,b)$ pre ľubovoľné $\delta\in(0,b-a)$. Predpokladajme, že $f\in\mathscr{R}\langle a,\eta\rangle$ pre ľubovoľné $\eta\in\langle a,b)$. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál funkcie f na intervale $\langle a,b)$ *existuje* (resp. *konverguje*), akk existuje vlastná limita $\lim\limits_{\eta\to b^-}(\mathscr{R})\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x$. Vtedy kladieme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to b^-}(\mathscr{R})\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.4}$$

Ak limita $\lim\limits_{\eta\to b^-}(\mathscr{R})\int_a^\eta f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje alebo je nevlastná, vtedy hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál (5.4) *diverguje*.

Podstata uvedenej definície spočíva v tom, že v ľubovoľnom okolí bodu b môže byť funkcia f neohraničená. Pre takýto bod b zavedieme onedlho označenie singulárny alebo kritický bod funkcie f, pozri nasledujúci Oddiel 5.3. Keby funkcia f bola $\mathscr{R}$-integrovateľná na intervale $\langle a, \eta\rangle$ pre ľubovoľné $\eta \in \langle a, b)$ a ohraničená na intervale $\langle a, b)$, môžeme ju dodefinovať v bode b a dostaneme tak funkciu $\mathscr{R}$-integrovateľnú na intervale $\langle a, b\rangle$. Pritom $\mathscr{R}$-integrál z dodefinovanej funkcie je rovný limite v (5.4) a nezávisí od hodnoty funkcie v bode b.

Poznámka 5.7. Analogicky sa definuje nevlastný $\mathscr{R}$-integrál, ak funkcia f je definovaná na intervale $(a, b\rangle$, neohraničená na intervale $(a, a+\delta)$ pre ľubovoľné $\delta \in (0, b-a)$ a je $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom uzavretom intervale $\langle \eta, b\rangle$. Potom

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to a^+}(\mathscr{R})\int_\eta^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

Ak limita v (5.5) existuje, tak nevlastný $\mathscr{R}$-integrál sa nazýva konvergentný, v opačnom prípade sa nazýva divergentný.

Príklad 5.8. Ukážte, že konverguje nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$. Funkcia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ je spojitá na intervale $\langle 0, 1)$, ale nie je na tomto intervale ohraničená, pretože $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Pre ľubovoľné $\eta \in \langle 0, 1)$ je $f \in \mathscr{R}\langle 0, \eta\rangle$ a

$$(\mathscr{R})\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = (\mathscr{N})\int_0^\eta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \big[-2\sqrt{1-x}\,\big]_0^\eta = 2(1-\sqrt{1-\eta}\,)\,.$$

Potom

$$(\mathscr{R})\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\eta\to 1^-} 2(1-\sqrt{1-\eta}\,) = 2\,.$$

To znamená, že daný nevlastný $\mathscr{R}$-integrál konverguje a jeho hodnota je 2.

Príklad 5.9. Nech $-\infty < a < b < +\infty$. Zistite, pre aké $\alpha > 0$ konverguje nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$. Funkcia $f(x) = (x-a)^{-\alpha}$ je definovaná na intervale $(a, b\rangle$, no nie je tam ohraničená, pretože $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. Keďže je to spojitá funkcia na každom intervale $\langle \eta, b\rangle$ pre $a < \eta \le b$, je preto $\mathscr{R}$-integrovateľná na týchto intervaloch a platí

$$(\mathscr{R})\int_\eta^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\eta^b = \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}-(\eta-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{ak} \quad \alpha \neq 1\,, \\ \big[\ln(x-a)\big]_\eta^b = \ln(b-a) - \ln(\eta-a) & \text{ak} \quad \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Limitou pre $\eta \to a^+$ dostaneme

$$(\mathscr{R})\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{ak} \quad \alpha < 1\,, \\ +\infty & \text{ak} \quad \alpha \ge 1\,. \end{cases}$$

Odtiaľ vidíme, že daný $\mathscr{R}$-integrál konverguje pre $0 < \alpha < 1$ a diverguje pre $\alpha \ge 1$.

5.3 Všeobecný prípad nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu

Doteraz sme sa zaoberali funkciami, ktoré boli neohraničené na ľavom (resp. pravom) okolí bodu b (resp. bodu a), pričom body a, b boli koncové body intervalu integrovania alebo interval integrácie bol neohraničený, t.j. buď $a = -\infty$ alebo $b = +\infty$. Existujú však aj zložitejšie situácie, napr.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

V prvom prípade integrand je funkcia neohraničená na okolí bodu 0, ktorý je vnútorným bodom intervalu $\langle -1, 1\rangle$. V druhom prípade je integrand funkcia neohraničená na okolí bodu 1 aj bodu 2 a naviac interval integrácie je neohraničený. Sú to príklady funkcií s konečným počtom tzv. kritických bodov.

Definícia 5.10. Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazývame *kritický* bod funkcie f, ak nastane jeden z prípadov:

a) existuje $\delta_0 > 0$ také, že funkcia f je definovaná na intervale $(x_0 - \delta_0, x_0)$ a je neohraničená na intervale $(x_0 - \delta, x_0)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$;

b) existuje $\delta_0 > 0$ také, že funkcia f je definovaná na intervale $(x_0, x_0 + \delta_0,)$ a je neohraničená na intervale $(x_0, x_0 + \delta)$ pre ľubovoľné $0 < \delta < \delta_0$.

Nevlastné číslo $+\infty$ $[-\infty\ ]$ nazývame kritický bod funkcie f, ak funkcia f je definovaná na intervale $(K, +\infty)$ $[(-\infty, K)]$ pre nejaké číslo K.

Všimnime si, že v Definíciách 5.1 a 5.6 boli definované také nevlastné $\mathscr{R}$-integrály, že práve jeden koncový bod intervalu (a, b) bol kritický bod funkcie f. Pretože otázka konvergencie nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu je rovnaká tak pre nevlastný $\mathscr{R}$-integrál na neohraničenom intervale, ako aj pre nevlastný $\mathscr{R}$-integrál neohraničenej funkcie v okolí jedného z koncových bodov intervalu integrovania, v ďalšom budeme uvažovať tieto prípady spolu v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 5.11. Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b), s výnimkou konečného počtu kritických bodov $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ (aj body a, b môžu byť kritické body funkcie f). Nech funkcia f je $\mathscr{R}$-integrovateľná na každom podintervale intervalu (a, b), ktorý neobsahuje ani jeden kritický bod. Hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje*, akk pre každú postupnosť bodov $(d_i)_0^k$ takú, že $a < d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < c_k < d_k < b$, konvergujú $\mathscr{R}$-integrály

$$(\mathscr{R})\int_a^{d_0} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ (\mathscr{R})\int_{d_0}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \ldots, (\mathscr{R})\int_{c_k}^{d_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ (\mathscr{R})\int_{d_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.6}$$

Súčet týchto integrálov budeme nazývať *nevlastným $\mathscr{R}$-integrálom* $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak aspoň jeden z integrálov v (5.6) diverguje, tak hovoríme, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje*.

Každý z $\mathscr{R}$-integrálov v (5.6) je nevlastný v zmysle jednej z Definícií 5.1 a 5.6. Potrebujeme ukázať korektnosť Definície 5.11, t.j. že nie je závislá na voľbe bodov $d_0, d_1, \dots, d_k$.

Veta 5.12. *Nech* $(e_i)_0^k$ *je postupnosť bodov takých, že* $a < e_0 < c_1 < e_1 < \cdots < c_k < e_k < b$. *Integrály v* (5.6) *konvergujú práve vtedy, keď konvergujú integrály*

$$(\mathscr{R})\int_a^{e_0} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ (\mathscr{R})\int_{e_0}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x, \dots, (\mathscr{R})\int_{c_k}^{e_k} f(x)\,\mathrm{d}x,\ (\mathscr{R})\int_{e_k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.7}$$

a súčet integrálov (5.6) *sa rovná súčtu integrálov* (5.7).

Dôkaz. Označme $c_0 = a, c_{k+1} = b$. Stačí nám ukázať, že pre každé $i = 0, 1, \dots, k$ integrály $(\mathscr{R})\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,, (\mathscr{R})\int_{d_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergujú práve vtedy, keď konvergujú integrály $(\mathscr{R})\int_{c_i}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,, (\mathscr{R})\int_{e_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ a

$$(\mathscr{R})\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{d_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathscr{R})\int_{c_i}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{e_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nech i je niektoré z čísel $0, 1, \dots, k$. Ak $d_i = e_i$, tvrdenie zrejme platí. Nech teda $d_i < e_i$ (v prípade $d_i > e_i$ postupujeme podobne) a nech konvergujú integrály $(\mathscr{R})\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\mathscr{R})\int_{d_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Použitím definície nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu a aditívnosti vlastného $\mathscr{R}$-integrálu (pozri Vetu 3.61) dostávame

$$\begin{aligned}
(\mathscr{R})\int_{c_i}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{d_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to c_i^+}(\mathscr{R})\int_{\xi}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta\to c_{i+1}^-}(\mathscr{R})\int_{d_i}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\xi\to c_i^+}(\mathscr{R})\int_{\xi}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta\to c_{i+1}^-}\left((\mathscr{R})\int_{d_i}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{e_i}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{\xi\to c_i^+}\left((\mathscr{R})\int_{\xi}^{d_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{d_i}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \lim_{\eta\to c_{i+1}^-}(\mathscr{R})\int_{e_i}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\xi\to c_i^+}(\mathscr{R})\int_{\xi}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta\to c_{i+1}^-}(\mathscr{R})\int_{e_i}^{\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (\mathscr{R})\int_{c_i}^{e_i} f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathscr{R})\int_{e_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že konvergujú integrály na pravej strane rovnosti, z čoho dostávame konvergenciu integrálov na ľavej strane. □

Predchádzajúci výsledok nám umožňuje rozdeliť interval (a, b) na konečný počet podintervalov, v každom z ktorých má funkcia f len jeden kritický bod.

Príklad 5.13. Ukážte, že konverguje nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Uvažujme ľubovoľný bod $a \in \mathbb{R}$. Pre každé $\xi > a$ a každé $\eta < a$ existujú vlastné $\mathscr{R}$-integrály (zdôvodnite všetky medzikroky pri ich výpočte!)

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi) &= (\mathscr{R})\int_a^{\xi}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac12)^2+\frac34} = \frac{2}{\sqrt3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\xi+1}{\sqrt3} - \operatorname{arctg}\frac{2a+1}{\sqrt3}\right), \\
\Psi(\eta) &= (\mathscr{R})\int_{\eta}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac12)^2+\frac34} = \frac{2}{\sqrt3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a+1}{\sqrt3} - \operatorname{arctg}\frac{2\eta+1}{\sqrt3}\right).
\end{aligned}$$

Keďže

$$(\mathscr{R})\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2a+1)}{3}\right),$$

$$(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\lim_{\eta\to-\infty}\Psi(\eta)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2a+1)}{3}+\frac{\pi}{2}\right),$$

tak daný nevlastný $\mathscr{R}$-integrál konverguje a jeho hodnota je

$$(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}+(\mathscr{R})\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Príklad 5.14. Vyšetrite konvergenciu nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu $I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$. Funkcia $\frac{1}{x^2-1}$ má dva kritické body $x=1$ a $x=+\infty$. Daný $\mathscr{R}$-integrál bude konvergovať, ak budú konvergovať $\mathscr{R}$-integrály

$$(\mathscr{R})\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1},\quad(\mathscr{R})\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1},\quad(\mathscr{R})\int_2^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$$

Pozrime sa na prvý integrál. Nech $\xi\in\langle 0,1)$ je ľubovoľné. Potom

$$\begin{aligned}(\mathscr{R})\int_0^{\xi}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}&=\frac{1}{2}(\mathscr{R})\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathscr{N})\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_0^{\xi}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\xi-1}{\xi+1}\right|.\end{aligned}$$

Keďže

$$\lim_{\xi\to1^-}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\xi-1}{\xi+1}\right|=+\infty,$$

to znamená, že nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ diverguje, preto ostatné $\mathscr{R}$-integrály už nemusíme vyšetrovať. Podľa Definície 5.11 je daný $\mathscr{R}$-integrál I divergentný.

✠ Úlohy na precvičenie

◇ Dvaja počtári A a B počítajú integrál $(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Výsledky ich snažení sú nasledujúce:

$$A:\quad(\mathscr{R})\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}(\mathscr{R})\int_0^{t}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^t=+\infty.$$

$$B:\quad(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}(\mathscr{R})\int_{-t}^{t}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-t}^t=0.$$

Ako je to možné? Kto z nich má pravdu a prečo?

◇ Vypočítajte nasledujúce integrály:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x,\ a > 0;$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2};$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x;$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};$ (f) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{3x^2-2x-1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x};$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)};$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

◇ Nech nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_0^\infty \varphi(x^2)\,x\,\mathrm{d}x$ konverguje. Dokážte, že potom

$$(\mathscr{R})\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^2)\,x\,\mathrm{d}x = 0.$$

◇ Určte všetky hodnoty reálneho parametra p, pre ktoré $(\mathscr{R})\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, ak $f(x) = x^{-p}(1-\mathrm{e}^{-x})$.

★ Niekoľko poznámok o konvergencii nevlastného Riemannovho integrálu

Častokrát je dôležité vedieť rozhodnúť o konvergencii nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu bez jeho výpočtu (spomeňte si na analogickú situáciu v prípade nekonečných číselných radov!). Jedným takýmto príkladom je integrál

$$(\mathscr{R})\int_{1}^{\infty} \frac{x-\mathrm{E}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

pre ktorý nedokážeme nájsť uzavretú formulu, avšak vieme, že konverguje. Hodnota tohto integrálu je definovaná ako *Eulerova-Mascheroniho konštanta* $\gamma = 0{,}57721\ldots$ Ako zaujímavosť uveďme, že o čísle γ nie je známe, či je algebrické alebo transcendentné, dokonca nie je známe, či je racionálne alebo iracionálne. Rovnako ako v prípade nekonečných číselných radov je však možné získať kritériá konvergencie nevlastných $\mathscr{R}$-integrálov, ktorých dôkazy bežia veľmi podobne. Uvedieme tu len niekoľko príkladov.

(i) Cauchyho-Bolzanovo kritérium je jediným kritériom dávajúcim nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie ľubovoľného nekonečného číselného radu. Jeho obdoba pre nevlastný $\mathscr{R}$-integrál je nasledujúca: *nevlastný $\mathscr{R}$-integrál $(\mathscr{R})\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje práve vtedy, keď*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists M \ge a)(\forall A, B \ge M)\quad \left|(\mathscr{R})\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Pri praktických výpočtoch je však toto kritérium ťažko použiteľné, preto uvedieme niekoľko ďalších prakticky viac použiteľných.

(ii) Pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi je jednoduché overiť, že postupnosť jeho čiastočných súčtov je neklesajúca. Ak je naviac ohraničená zhora, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Analogicky vieme vysloviť nasledujúce kritérium konvergencie nevlastného $\mathscr{R}$-integrálu: *ak f je nezáporná $\mathscr{R}$-integrovateľná funkcia na každom intervale $\langle a, x\rangle$ pre $x > a$ a existuje $M > 0$ také, že pre všetky $x > a$ je $(\mathscr{R})\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq M$, potom $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.* Na základe tohto kritéria vieme jednoducho rozhodnúť o konvergencii integrálu $(\mathscr{R})\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, pretože pre každé $x > 1$ je $(\mathscr{R})\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq 1$.

(iii) Ďalším dôležitým kritériom pre konvergenciu radov je (nelimitné) porovnávacie, ktoré tvrdí, že ku konvergencii radu s nezápornými členmi je postačujúce nájsť majorantný konvergentný rad a k jeho divergencii nájsť minorantný divergentný rad. Uvedieme teraz analógiu pre nevlastný $\mathscr{R}$-integrál: *ak f a g sú nezáporné $\mathscr{R}$-integrovateľné funkcie na každom intervale $\langle a, x\rangle$ pre $x > a$ a pre všetky $x > a$ je $f(x) \leq g(x)$, potom z konvergencie $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ vyplýva konvergencia $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a z divergencie $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ vyplýva divergencia $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.* Potom $(\mathscr{R})\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje, pretože pre každé $x > 1$ je $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ a $(\mathscr{R})\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ zase diverguje, pretože pre každé $x > 1$ je $\frac{2+\sin x}{x} \geq \frac{1}{x} > 0$.

(iv) Uvedené kritéria pojednávali o nezáporných funkciách. Analogicky ako v prípade číselných radov sa dá zaviesť pojem absolútnej konvergencie (ktorá implikuje konvergenciu) a mnohé ďalšie kritériá. Spomenieme už len *Dirichletovo kritérium* pojednávajúce o konvergencii nevlastného integrálu pre nie nutne nezáporné funkcie: *nech $f, g : \langle a, +\infty) \to \mathbb{R}$ sú také, že f je klesajúca s $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, g je spojitá a existuje M také, že pre všetky $x > a$ je $(\mathscr{R})\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq M$, potom $(\mathscr{R})\int_a^{\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.* Pomocou tohto kritéria ukážte konvergenciu integrálu $(\mathscr{R})\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ a $(\mathscr{R})\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$!

Literatúra

[1] Brannan, D.: *A First Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[2] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differencialnogo i integraľnogo isčislenia III*, Moskva, GITTL, 1963.

[3] Gera, M., Ďurikovič, V.: *Matematická analýza 1*, Alfa, Bratislava, 1990.

[4] Gordon, R. A.: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics **4**, Providence, RI, 1994.

[5] Hairer, E., Wanner, G.: *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.

[6] Mihalíková, B., Ohriska, J.: *Matematická analýza 1*, skriptá UPJŠ, Košice, 2000.

[7] Mihalíková, B., Ohriska, J.: *Matematická analýza 2*, skriptá UPJŠ, Košice, 2007.

[8] Neubrunn, T., Vencko, J.: *Matematická analýza I.*, skriptá UK, Bratislava, 1992.

[9] Neubrunn, T., Vencko, J.: *Matematická analýza II.*, skriptá UK, Bratislava, 1992.

[10] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, New York, 1964.

[11] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: *Malý pruvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996.

[12] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele, První a Druhý díl*, Matfyzpress, Karlova univerzita, Praha, 1997.