P. J. Šafárik University
Faculty of Science
Institute of mathematics
Jesenná 5, 040 01 Košice, Slovakia

M. Hančová a G. Vozáriková

Odhad variančných parametrov v modeli FDSLRM pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie

IM Preprint, series A, No. 7/2013
December 2013

Odhad variančných parametrov v modeli FDSLRM pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie

Martina Hančová a Gabriela Vozáriková
Ústav matematických vied, PF UPJŠ v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: martina.hancova@upjs.sk

Abstrakt

Článok predstavuje metódu odhadovania variančných parametrov modelov časových radov vo všeobecnej triede lineárnych regresných modelov označovanej ako trieda FDSLRM. Prezentovaná motivácia vysvetľuje definíciu odhadov pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie. Hlavným výsledkom sú odvodené teoretické vlastnosti prvého a druhého rádu pre zavedené odhady v modeli FDSLRM bez predpokladu a s predpokladom ortogonality.

Kľúčové slová: časové rady; model FDSRLM; odhad variančných parametrov; odhad pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie; vlastnosti odhadov

Odbor matematiky: 62M10; 91B84.

1 Úvod

Jednou z najdôležitejších oblastí aplikácie teórie časových radov je oblasť predikcie, ktorá rieši úlohu ako na základe minulých a súčasných hodnôt časového radu predpovedať jeho budúce hodnoty. Teória predikcie nazývaná *kriging* v prípade časových radov (napr. Štulajter (2002); Brockwell and Davis (2009); Christensen (2011)) vychádza z modelovania časového radu vhodným lineárnym regresným modelom a nasledovná analytická alebo numerická optimalizácia na množine možných lineárnych prediktorov vedie k nájdeniu najlepšieho nevychýleného prediktora (v skratke ang. BLUP) budúcej hodnoty časového radu. Optimalizačným kritériom krigingu je pritom minimalizácia strednej štvorcovej chyby prediktora (v skratke ang. MSE).

V rokoch 2002-2003 zaviedol triedu lineárnych modelov nazývanú FDSLRM[1] ako dostatočne všeobecnú triedu lineárnych regresných modelov časových radov $X(.)$ pre kriging Štulajter, pričom spolu s ďalšími začal skúmať jej vlastnosti a aplikácie (napr.Štulajter (2002, 2003, 2007); Štulajter and Witkovský (2004); Hančová (2007, 2008b); Harman and Štulajter (2010); Vozáriková (2013)). Model FDSLRM má stredné hodnoty dané lineárnou regresiou a chybové členy sú popísané čistým konečným spektrom a bielym šumom:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(t) + \sum_{j=1}^{l} Y_j v_j(t) + w(t);\ t = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

kde k a l sú známe nezáporné prirodzené čísla,
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)' \in \mathbb{E}^k$ je vektor regresných parametrov,
$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_l)'$ je náhodný vektor s $E\{Y\} = (0, \ldots, 0)' \in \mathbb{E}^l$ a s maticou kovariancie $Cov\{Y\} = diag(\sigma_j^2) \in \mathbb{E}^{l \times l}$, kde $\sigma_j^2 \geq 0;\ j = 1, 2, \ldots, l$,
$f_i(.);\ i = 1, 2, \ldots, k$ a $v_j(.);\ j = 1, 2, \ldots, l$ sú reálne funkcie definované na $\mathbb{E}^1$,
$w(.)$ je biely šum[2] nekorelovaný s Y a s disperziou $D\{w(t)\} = \sigma^2 > 0$.

Z matematického hľadiska možno pomocou FDSLRM modelovať každý časový rad $X(.)$ v tvare $X(t) = m(t) + \varepsilon(t); t = 1, 2, \ldots$, kde funkcia strednej hodnoty $m(t)$ je „rozumná“ reálna funkcia[3] a chybový člen $\varepsilon(.)$ predstavuje stacionárny proces s nulovou strednou hodnotou (Hančová, 2007). Z pohľadu praxe, uvedený model možno plne využiť v ekonomických aplikáciách akými je modelovanie spotreby komodít, napr. elektrickej energie, či benzínu (Štulajter, 2002; Štulajter and Witkovský, 2004; Vozáriková, 2013).

Model FDSLRM časového radu $X(.)$ má nasledujúce základné vlastnosti (Štulajter, 2003; Hančová, 2007):

[1]Skratka z ang. finite discrete spectrum linear regression model.

[2]Biely šum je definovaný ako rad nekorelovaných náhodných premenných s nulovou strednou hodnotou a rovnakou disperziou σ^2.

[3]Ide o každú reálnu funkciu aproximovateľnú vhodným funkcionálnym radom, napr. Taylorovým, či Fourierovým.

(i) Funkcia strednej hodnoty modelu je daná vzťahom

$$m_\beta(t) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i(t);\ \ t = 1, 2, \dots \ . \tag{2}$$

(ii) Kovariančná funkcia je rovná[4]:

$$R_\nu(s,t) = \sigma^2 \delta_{st} + \sum_{j=1}^{l} \sigma_j^2 v_j(s) v_j(t); s,t = 1,2,\dots \ . \tag{3}$$

(iii) Pre ľubovoľné konečné pozorovanie $X = (X(1), \dots, X(n))'$ modelu platí:

$$X = \mathrm{F}\beta + \varepsilon, E\left\{\varepsilon\right\} = 0, \Sigma_\nu = Cov\left\{\varepsilon\right\} = \sigma^2 \mathrm{I}_n + \sum_{j=1}^{l} \sigma_j^2 \mathrm{V}_j > 0, \tag{4}$$

kde $\mathrm{F} = (f_1\ f_2\ \dots\ f_k) \in \mathbb{E}^{n \times k}$ je matica plánu modelu so stĺpcami
$f_i = (f_i(1), \dots, f_i(n))';\ i = 1, 2, \dots, k,$
$\mathrm{V}_j = v_j v_j' \in \mathbb{E}^{n \times n}$ s $v_j = (v_j(1), v_j(2), \dots, v_j(n))';\ j = 1, 2, \dots, l$ sú matice popisujúce štruktúru kovariančnej matice $\Sigma_\nu > 0$.

(iv) Vektor kovariancií medzi pozorovaním X a a ľubovoľnou „budúcou“ zložkou $X(n+d), d = 1, 2, \dots$ je daný vzťahom:

$$r_\nu = Cov\left\{X, X(n+d)\right\} = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j^2 v_j(n+d) v_j\ . \tag{5}$$

Ak v našich úvahách zavedieme maticu $\mathrm{V} = (v_1\, v_2 \dots v_l) \in \mathbb{E}^{n \times l}$, tak pozorovanie X má tvar: $X = \mathrm{F}\beta + \mathrm{V}Y + w; w = (w(1), ..., w(n))'$. Z hľadiska praktických aplikácií FDSLRM budeme predpokladať o maticiach F, V, že sú nenulové a plnej hodnosti, t.j. $h(F) = k$ a $h(V) = l$.

2 Definícia odhadov pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie

V praktických aplikáciách analýzy a predikcie časových radov sú regresné parametre $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)' \in \mathbb{E}^k$ a variančné parametre $\nu = (\sigma^2, \sigma_1^2, ..., \sigma_l^2)' \in$

[4] δ_{st} je Kroneckerovo delta, pre ktoré platí $\delta_{st} = 1$ pre $s = t$ a $\delta_{st} = 0$ pre $s \neq t$

$(0, \infty)^{l+1}$ neznáme, preto je potrebné ich odhadnúť, čo je aj jedným z krokov krigingu (Stein, 1999; Štulajter, 2002).

Pretože konečné pozorovanie X pre FDSLRM patrí do triedy lineárnych zmiešaných modelov, odhad ν úzko súvisí s odhadom variančných parametrov v týchto modeloch. Tejto problematike je venovaná rozsiahla literatúra, napr. Rao and Kleffe (1988); Searle et al. (1992); Searle (1995); Harville (2008).

Tradičné metódy odhadu ako metóda maximálnej vierohodnosti (MLE, resp. REMLE) alebo dvojitá metóda najmenších štvorcov (DOOLSE, resp. MDOOLSE) vo všeobecnosti môžu viesť k záporným odhadom, resp. je obtiažne teoreticky študovať ich vlastnosti.

Z toho dôvodu boli napr. odhady DOOLSE a MDOOLSE založené na dvojitej metóde najmenších štvorcov teoreticky študované priamo vo FDSLRM len za podmienky ortogonality: $f_i \perp v_j$ a $v_i \perp v_j$ (Štulajter and Witkovský, 2004).

Problém nezápornosti, resp. všeobecnosti teoretického štúdia bol vyriešený pomocou prirodzených odhadov NE, MNE (Hančová, 2008a,b). Táto metóda odhadu spočíva v predikcii zložiek náhodného vektora $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_l)'$, pretože na základe vzťahu $\sigma_j^2 = Cov\{Y_j\} = E\{Y_j^2\}; j = 1, 2, \ldots, l$ prirodzenými odhadcami σ_j^2 sa javia práve zložky Y_j^2 a ich realizácie by boli práve odhady σ_j^2. V prípade prirodzených odhadov NE boli predikcie Y_j^2 vytvorené pomocou klasickej metódy najmenších štvorcov.

V publikácii Hančová (2008b) bola navrhnutá tiež aj myšlienka určenia predikcie Y pomocou najlepšej nevychýlenej lineárnej predikcie (BLUP), t.j. definovať tzv. prirodzených BLUP odhadcov pre σ_j^2 ako:

$$\mathring{\sigma}_j^2(X) = [Y_\nu^*]_j^2;\ Y_\nu^* \text{ je BLUP pre } Y \text{ založený na } X = (X(1), X(2), \ldots, X(n))'.$$

Pre σ^2 berieme štandardný odhad rovný súčtu štvorcov rezíduí metódy najmenších štvorcov delený počtom stupňov voľnosti $n - k - l$. V tomto článku je naším cieľom teoreticky rozpracovať myšlienku tohto nového odhadcu, nájsť jeho analytické (výpočtové) vyjadrenie a základné štatistické vlastnosti.

3 Výpočtový tvar BLUP odhadcov

Ako bolo spomenuté v predchádzajúcej časti, pri BLUP odhadoch vychádzame z prediktora BLUP vektora Y. Na výpočet BLUP-u pre Y použijeme známe Hendersonove rovnice pre zmiešaný model (Searle et al., 1992; Christensen, 2011) aplikované na konečné pozorovanie X vo FDSLRM:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F}'\mathrm{F} & \mathrm{F}'\mathrm{V} \\ \mathrm{V}'\mathrm{F} & \mathrm{D}_* + \mathrm{V}'\mathrm{V} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_\nu^* \\ Y_\nu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}'X \\ \mathrm{V}'X \end{pmatrix} \tag{6}$$

kde $\mathrm{D}_* \equiv \mathrm{diag}(\sigma^2/\sigma_j^2) = \sigma^2\mathrm{D}^{-1}$, β_ν^* je BLUE (najlepší lineárny nevychýlený odhad) pre β. Na blokovú maticu v (6) sa možno pozrieť ako súčet blokovej matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_* \end{smallmatrix}\right)$ a Gramovej matice $\mathrm{G} = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{F}'\mathrm{F} & \mathrm{F}'\mathrm{V} \\ \mathrm{V}'\mathrm{F} & \mathrm{V}'\mathrm{V} \end{smallmatrix}\right)$ stĺpcov blokovej matice $(\mathrm{F}\,\mathrm{V}) = (f_1\, f_2 \dots f_k\, v_1\, v_2 \dots v_l)$.

Z predpokladov kladených na matice F, V na základe Banachiewiczovej formuly (Zhang, 2005; Hančová, 2008a) pre blokové inverzné matice typu 2×2 možno dokázať existenciu aj nasledovný tvar inverznej matice k blokovej matici v (6):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F}'\mathrm{F} & \mathrm{F}'\mathrm{V} \\ \mathrm{V}'\mathrm{F} & \mathrm{D}_* + \mathrm{V}'\mathrm{V} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1}\mathrm{F}'\mathrm{V} \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} \mathbb{W}^{-1} \left(-\mathrm{V}'\mathrm{F}(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1}, \mathrm{I}\right)$$

kde $\mathbb{W} = \mathrm{D}_* + \mathrm{V}'(\mathrm{I} - \mathrm{F}(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1}\mathrm{F}')\mathrm{V} > 0$. Podľa Hančová (2008a) predstavuje matica $(\mathrm{I} - \mathrm{F}(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1}\mathrm{F}') \in \mathbb{E}^{n\times n}$ ortogonálny projektor (ozn. M_F) do ortogonálneho doplnku k lineárnej obálke stĺcov matice F. Matica $\mathrm{V}'\mathrm{M}_\mathrm{F}\mathrm{V}$ je v lineárnej algebre blokových matíc známa ako Schurov doplnok (ozn. W) k $\mathrm{F}'\mathrm{F}$ vo vyššie uvedenej Gramovej matici G.

Dosadením do Hendersonových rovníc (6) tak dostávame:

$$\begin{pmatrix} \beta_\nu^* \\ Y_\nu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}'\mathrm{F} & \mathrm{F}'\mathrm{V} \\ \mathrm{V}'\mathrm{F} & \mathrm{D}_* + \mathrm{V}'\mathrm{V} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{F}'X \\ \mathrm{V}'X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -\mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'\mathrm{F}(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1} & \mathbb{W}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{F}'X \\ \mathrm{V}'X \end{pmatrix}$$

$$Y_\nu^* = \mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'(\mathrm{I} - \mathrm{F}(\mathrm{F}'\mathrm{F})^{-1}\mathrm{F}')X = \mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'\mathrm{M}_\mathrm{F}X \tag{7}$$

Ak zavedieme označenie pre maticu $\mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'\mathrm{M}_\mathrm{F} \equiv \mathbb{T} \in \mathbb{E}^{l\times n}$, môžeme tvar nových odhadov σ_j^2 vyjadriť nasledovne.

Výpočtový tvar BLUP odhadcov. Nech je daný model pozorovania FDSLRM:

$$X = \mathrm{F}\beta + \mathrm{V}Y + w,\ E\{w\} = 0,\ Cov\{w\} = \sigma^2\mathrm{I}_n,$$

$$D\{Y\} = diag(\sigma_j^2),\ Cov\{Y, w\} = 0.$$

Potom pre BLUP odhady $\mathring{\sigma}_1^2(X), \ldots, \mathring{\sigma}_l^2(X)$ parametrov $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_l^2$ platí:

$$\mathring{\sigma}_j^2(X) = (Y_\nu^*)_j^2 = (\mathbb{T}X)_j'(\mathbb{T}X)_j = (t_j'X)'(t_j'X) = X't_jt_j'X;\ j = 1, 2, \ldots, l,$$

kde t_j je j-ty riadok matice $\mathbb{T}$, teda $t_j = (\mathbb{T}_{j1}, \mathbb{T}_{j2}, \ldots, \mathbb{T}_{jn})'$ a matica $\mathbb{T}$ je daná vzťahom $\mathbb{T} = \mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'\mathrm{M_F}$, kde $\mathbb{W} = diag(\sigma^2/\sigma_j^2) + \mathrm{V}'\mathrm{M_F}\mathrm{V}$.

Z výpočtového tvaru môžeme vidieť, že odhady majú súčasne aj tvar kvadratických foriem prislúchajúcich maticiam t_jt_j', t.j. sú kvadratickými odhadcami.

4 Štatistické vlastnosti odhadov

Vzhľadom na to, že odhad $\mathring{\sigma}^2(X)$ parametra σ^2 je tak isto definovaný ako v prípade prirodzených odhadcov, jeho vlastnosti sú uvedené v Hančová (2008a). V ďalšom sa budeme preto venovať už len vlastnostiam odhadov pre σ_j^2.

Odvodenie teoretických vlastností týchto odhadov týkajúci sa momentových charakteristík prvého a druhého rádu nám značne uľahčí nasledujúca lema určujúca vlastnosti matice $\mathbb{T}$. Jej dôkaz možno ľahko vykonať priamym dosadením a využitím vzťahov $\mathbb{T} = \mathbb{W}^{-1}\mathrm{V}'\mathrm{M_F}, \mathbb{W} = \mathrm{D}_* + \mathrm{V}'\mathrm{M_F}\mathrm{V}$ a vlastností ortogonálnych projektorov (ortogonalita, idempotentnosť, symetria) a Schurových doplnkov (symetria, pozitívna definitnosť) obdobne ako to bolo v Leme 3.1 článku Hančová (2008a).

Lema 4.1. *(Základné vlastnosti matice $\mathbb{T}$)*

(i) $\mathbb{T}\mathbb{T}' = \mathbb{W}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{D}_*\mathbb{W}^{-1})$

(ii) $\mathbb{T}\mathrm{F} = 0$ *a* $\mathbb{T}\mathrm{V} = \mathrm{I} - \mathrm{D}_*\mathbb{W}^{-1}$

(iii) $\mathbb{T}\Sigma_\nu\mathbb{T}' = \mathrm{D} - \sigma^2\mathbb{W}^{-1}$

Z vlastnosti (ii) lemy ihneď vyplýva, že $t_j'\mathrm{F} = 0$, resp. $t_jt_j'\mathrm{F} = 0$. Táto podmienka vedie k záveru, že BLUP odhady $\mathring{\sigma}_j^2(X)$ sú invariantnými kvadratickými odhadcami[5]. Nasledujúca veta sumarizuje teoretické vlastnosti odhadov.

Veta 4.2. *(Vlastnosti odhadov $\mathring{\sigma}_j^2$)*
Odhady $\mathring{\sigma}_j^2; j = 1, 2, \ldots$ založené na BLUP-e Y_ν^* majú nasledujúce štatistické vlastnosti:

(i) $E_\nu\left\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = \sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj};\ j = 1, 2, \ldots, l,$

V prípade normálneho rozdelenia $X \sim N(\mathrm{F}\beta, \Sigma_\nu)$:

(ii) $D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = 2\left(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj}\right)^2\ j = 1, 2, \ldots, l,$

(iii) $Cov_\nu\left\{\mathring{\sigma}_i^2(X), \mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = 2\left(\sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{ij}\right)^2\ j = 1, 2, \ldots, l,\ i \neq j$

(iv) $MSE_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = \sigma^4(\mathbb{W}^{-1})_{jj}^2 + 2\left(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj}\right)^2\ j = 1, 2, \ldots, l,$

Dôkaz. Pri dôkaze aplikujeme tvrdenia danej lemy spolu so známymi výrazmi pre stredné hodnoty a konvariancie invariantných kvadratických odhadcov (pozri napr. Christensen (2011)) $E_\nu\left\{X'\mathrm{A}X\right\} = tr(\mathrm{A}\Sigma_\nu)$ a ak $X \sim N(\mathrm{F}\beta, \Sigma_\nu)$, tak $Cov_\nu\left\{X'\mathrm{A}X, X'\mathrm{B}X\right\} = 2tr(\mathrm{A}\Sigma_\nu\mathrm{B}\Sigma_\nu)$

(i) $E_\nu\left\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = E(X't_jt_j'X) = tr(t_jt_j'\Sigma_\nu) = tr(t_j'\Sigma_\nu t_j) = (\mathbb{T}\Sigma_\nu\mathbb{T}')_{jj}$.
Podľa (iii) lemy $(\mathbb{T}\Sigma_\nu\mathbb{T}')_{jj} = \mathrm{D}_{jj} - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj} = \sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj}$

(ii) $D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = 2tr(t_jt_j'\Sigma_\nu t_jt_j'\Sigma_\nu) = 2tr(t_j'\Sigma_\nu t_j't_j\Sigma_\nu t_j) = 2(\mathbb{T}\Sigma_\nu\mathbb{T}')_{jj}$
S využitím dôkazu (i) $D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = 2(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj})^2$

(iii) Analogicky ako v bode (ii):

$$Cov_\nu\left\{\mathring{\sigma}_i^2(X), \mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = 2tr(t_it_i'\Sigma_\nu t_jt_j'\Sigma_\nu) = 2tr(t_i'\Sigma_\nu t_jt_j'\Sigma_\nu t_i) = 2\left(t_i'\Sigma_\nu t_j\right)^2 = 2\left(\mathbb{T}\Sigma_\nu\mathbb{T}'\right)_{ij}^2 = 2\left(0 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{ij}\right)^2 = 2\left(\sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{ij}\right)^2$$

[5]Pripomeňme, že ak X spĺňa lineárny regresný model so strednou hodnotou $E_\beta\{X\} = \mathrm{F}\beta$, tak kvadratická forma $X'\mathrm{A}X$ sa nazýva invariantným kvadratickým odhadcom (vzhľadom na β), ak $\mathrm{AF} = 0$. Dôsledkom invariantnosti kvadratického odhadcu je to, že príslušná kvadratická forma nezávisí od parametra strednej hodnoty β (Štulajter, 2002).

(iv) $MSE_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = E_\nu\left\{(\mathring{\sigma}_j^2(X) - \sigma_j^2)^2\right\} = (E_\nu\left\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} - \sigma_j^2)^2 + D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} =$

$$= (\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj} - \sigma_j^2)^2 + 2(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj})^2 =$$
$$= \sigma^4(\mathbb{W}^{-1})_{jj}^2 + 2(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj})^2.$$

Prípad ortogonality. V článku Štulajter and Witkovský (2004) skúmali autori vlastnosti DOOLSE a MDOOLSE odhadcov v prípade ortogonálneho FDSLRM, pre ktorý platí podmienka ortogonality spomenutá v časti 2 tohto článku. V takom prípade pre matice $\mathrm{M_F}, \mathrm{V}, \mathbb{W}$ dostávame:

$$\mathrm{M_F V} = \mathrm{V}, \quad \mathrm{V'V} = diag(\|v_j\|^2),$$
$$\mathbb{W} = \mathrm{D}_* + \mathrm{W} = \mathrm{D}_* + \mathrm{V'V} = diag\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_j^2} + \|v_j\|^2\right).$$

Zavedením efektívneho označenia $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_j^2\|v_j\|^2} \equiv \lambda_j > 0$, je $\mathbb{W} = diag[\|v_j\|^2(\lambda_j+1)]$. Pre BLUP Y_ν^* odvodený pre všeobecný model (7) tak máme:

$$Y_\nu^* = \mathbb{W}^{-1}\mathrm{M_F V'}X = diag\left(\frac{1}{[\|v_j\|^2(\lambda_j+1)]}\right)\mathrm{V'}X = \begin{pmatrix} \dfrac{v_1'}{[\|v_1\|^2(\lambda_1+1)]} \\ \vdots \\ \dfrac{v_l'}{[\|v_l\|^2(\lambda_l+1)]} \end{pmatrix} X$$

Pre odhad $\mathring{\sigma}_j^2$ potom platí

$$\mathring{\sigma}_j^2 = (Y_\nu^*)_j^2 = X'\frac{v_j v_j'}{[\|v_j\|^2(\lambda_j+1)]^2}X = X'\frac{v_j v_j'}{\|v_j\|^4(\lambda_j+1)^2}X$$

Odhadca $\mathring{\sigma}_j^2$ v ortogonálnom prípade má tvar:

$$\mathring{\sigma}_j^2 = X'\frac{v_j v_j'}{\|v_j\|^4(\lambda_j+1)^2}X \tag{8}$$

Analogicky dosadením príslušných výrazov do vety 4.2, tak dostávame jej dôsledok.

Dôsledok 4.3. *(Vlastnosti odhadcu $\mathring{\sigma}_j^2$ pre ortogonálny FDSLRM)*
Odhadca $\mathring{\sigma}_j^2$ založený na BLUP-e má nasledujúce štatistické vlastnosti:

(i) $E_\nu\left\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = \dfrac{\sigma_j^2}{\lambda_j + 1}$ $j = 1, 2, \ldots, l$, *kde* $\lambda_j = \dfrac{\sigma^2}{\sigma_j^2 \|v_j\|^2}$

V prípade normálneho rozdelenia $X \sim N(\mathrm{F}\beta, \Sigma_\nu)$*:*

(ii) $D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = \dfrac{2\sigma_j^4}{(\lambda_j + 1)^2}$ $j = 1, 2, \ldots, l$,

(iii) $Cov_\nu\left\{\mathring{\sigma}_i^2(X), \mathring{\sigma}_j^2(X)\right\} = 0$ $j = 1, 2, \ldots, l$, $i \neq j$

(iv) $MSE_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} = \dfrac{\sigma_j^4(\lambda_j^2 + 2)}{(\lambda_j + 1)^2}$ $j = 1, 2, \ldots, l$,

Porovnanie štatistických vlastností odhadcov. Z doterajších výsledkov a výsledkov článku o prirodzených odhadcoch Hančová (2008a) môžeme zostaviť nasledovnú tabuľku vlastností tu zavedených BLUP odhadcov a prirodzených odhadcov:

Char.	**Prirodzený odhadca** $\breve{\sigma}_j^2(X)$	**Odhadca** $\mathring{\sigma}_j^2(X)$
D_ν	$2(\sigma_j^2 + \sigma^2(\mathrm{W}^{-1})_{jj})^2$	$2(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj})^2$
MSE_ν	$\sigma^4(\mathrm{W}^{-1})_{jj}^2 + 2(\sigma_j^2 + \sigma^2(\mathrm{W}^{-1})_{jj})^2$	$\sigma^4(\mathbb{W}^{-1})_{jj}^2 + 2(\sigma_j^2 - \sigma^2(\mathbb{W}^{-1})_{jj})^2$

Tabuľka 1: Momentové charakteristiky BLUP a prirodzených odhadcov.

Matice D_* a W sú pozitívne definitné, t.j. v zmysle Löwnerovej relácie čiastočného usporiadania matíc[6] je $\mathbb{W} = \mathrm{D}_* + \mathrm{W} > \mathrm{W} > 0$. Rovnako aj ich inverzné matice sú pozitívne definitné, pričom $\mathrm{W}^{-1} > \mathbb{W}^{-1} > 0$. Ten istý vzťah platí aj pre prvky na hlavnej diagonále $(\mathrm{W}^{-1})_{jj} > (\mathbb{W}^{-1})_{jj} > 0$. Z tohto vzťahu a tabuľky 1 už ľahko možno vidieť, že platí nasledovná „porovnávacia" veta pre kvalitu týchto odhadcov.

Veta 4.4. *Uvažujme FDSLRM model (1), v ktorom matice* F, V *majú plnú hodnosť a všetky* $\sigma_j^2 \neq 0$, $\sigma^2 \neq 0$. *Nech* $\breve{\sigma}_j^2(X)$ *označuje prirodzeného odhadcu variančného parametra* σ_j^2 *a* $\mathring{\sigma}_j^2(X)$ *označuje odhadcu založeného na BLUP-e* Y_ν^*. *Potom platí:*

[6]Pozri napr. Chow and Wang (1993).

(i) $D_\nu\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} < D_\nu\{\breve{\sigma}_j^2(X)\}$,

(ii) $MSE\{\mathring{\sigma}_j^2(X)\} < MSE\{\breve{\sigma}_j^2(X)\}$.

5 Záverečné poznámky

V tomto článku sme zaviedli odhady variančných parametrov modelu FDSLRM pomocou najlepšej lineárnej nevychýlenej predikcie (BLUPu), pričom sme študovali teoretické vlastnosti takýchto odhadov vo všeobecnom a aj ortogonálnom prípade.

Navhrnuté odhady sú dané druhou mocninou zložiek BLUPu, preto sú vždy nezáporné. Podobne ako u prirodzených odhadov povaha definície dovolila teoretické štúdium vlastností BLUP odhadov, pričom sa ukázalo podobne ako v prípade prirodzených odhadov, že odhady sú invariatne kvadratické, vychýlené a nekonzistentné.

V porovnaní s prirodzenými odhadmi majú navrhnuté odhady menšiu disperziu a aj strednú štvorcovú chybu. Tento výsledok sa do istej miery dal aj očakávať, pretože kým pri prirodzených odhadoch boli Y_j odhadované na základe šikmej projekcie (viac v Hančová (2008a)), v prípade tu zavedených odhadcov sme brali najlepšiu predikciu v zmysle BLUP. V ďalšom teoretickom výskume bude potrebné komplexne porovnať daných odhadcov aj s tradičnými odhadcami.

Na druhej strane hodnota odhadov závisí od samotných parametrov, takže ich výpočet na rozdiel od prirodzených odhadov je možný len numericky — využitím iteračných procedúr pre hľadanie BLUP (Searle et al. (1992)). Z tohto pohľadu vznikajú výskumné otázky typické z oblasti numerickej analýzy ako je to prezentované v Searle (1995) (napr. aké počiatočné štartovacie hodnoty parametrov σ_j^2 je potrebné vybrať; ako výsledok iterácií závisí od zvoleného iteračného algoritmu; ako konečný počet krokov vplýva na kvalitu odhadov; aké problémy vznikajú s konvergenciou? ...).

Niektoré z týchto otázok boli okrem iného aj predmetom pilotného výskumu na konkrétnych prípadoch modelov FDSLRM pomocou počítačovej implementácie v štatistickom softvéri R realizovanej v práci (Vozáriková, 2013). Takisto dôkazy jednotlivých viet tohto článku sú v danej práci urobené detailnejšie.

Poďakovanie. Výskum a výsledky prezentované v tejto publikácii boli podporené grantom VEGA MŠ SR 1/0410/11.

Literatúra

Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (2009). *Time Series: Theory and Methods.* Springer, New York.

Chow, S.-C. and Wang, S.-G. (1993). *Advanced Linear Models: Theory and Applications.* Marcel Dekker, New York.

Christensen, R. (2011). *Plane Answers to Complex Questions: The Theory of Linear Models.* Springer, New York.

Hančová, M. (2007). *Predictions of time series in finite discrete spectrum linear regression models.* Dizertačná práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava.

Hančová, M. (2008a). Natural estimation of variances in a general finite discrete spectrum linear regression model. *Metrika*, 67(3):265–276.

Hančová, M. (2008b). Odhady variančných parametrov v LRM s konečným diskrétnym spektrom. In *Zborník posterov [online], 15. letná škola JČ(S)MF Robust 2008*, Pribylina.

Harman, R. and Štulajter, F. (2010). Optimal prediction designs in finite discrete spectrum linear regression models. *Metrika*, 72(2):281–294.

Harville, D. A. (2008). Accounting for the estimation of variances and covariances in prediction under a general linear model: an overview. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 39(1):1–15.

Rao, C. R. and Kleffe, J. (1988). *Estimation of variance components and applications.* North-Holland, Amsterdam.

Searle, S. R. (1995). An overview of variance component estimation. *Metrika*, 42(1):215–230.

Searle, S. R., Casella, G., and McCulloch, C. E. (1992). *Variance components.* Wiley.

Stein, M. L. (1999). *Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging.* Springer, New York.

Štulajter, F. (2002). *Predictions in Time Series Using Regression Models.* Springer, New York.

Štulajter, F. (2003). The MSE of the BLUP in a finite discrete spectrum LRM. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 26(1):125–131.

Štulajter, F. (2007). Mean squared error of the empirical best linear unbiased predictor in an orthogonal finite discrete spectrum linear regression model. *Metrika*, 65(3):331–348.

Štulajter, F. and Witkovský, V. (2004). Estimation of variances in orthogonal finite discrete spectrum linear regression models. *Metrika*, 60(2):105–118.

Vozáriková, G. (2013). *Odhady variančných parametrov v modeli FDSLRM.* Diplomová práca, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Košice.

Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and Its Applications.* Springer, New York.

Recent IM Preprints, series A

2009

1/2009 Zlámalová J.: *On cyclic chromatic number of plane graphs*
2/2009 Havet F., Jendroľ S., Soták R. and Škrabuľáková E.: *Facial non-repetitive edge-colouring of plane graphs*
3/2009 Czap J., Jendroľ S., Kardoš F. and Miškuf J.: *Looseness of plane graphs*
4/2009 Hutník O.: *On vector-valued Dobrakov submeasures*
5/2009 Haluška J. and Hutník O.: *On domination and bornological product measures*
6/2009 Kolková M. and Pócsová J.: *Metóda Monte Carlo na hodine matematiky*
7/2009 Borbeľová V. and Cechlárová K.: *Rotations in the stable b-matching problem*
8/2009 Mojsej I. and Tartaľová A.: *On bounded nonoscillatory solutions of third-order nonlinear differential equations*
9/2009 Jendroľ S. and Škrabuľáková E.: *Facial non-repetitive edge-colouring of semiregular polyhedra*
10/2009 Krajčiová J. and Pócsová J.: *Galtonova doska na hodine matematiky, kvalitatívne určenie veľkosti pravdepodobnosti udalostí*
11/2009 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2009*
12/2009 Hudák D. and Madaras T.: *On local propeties of* 1*-planar graphs with high minimum degree*
13/2009 Czap J., Jendroľ S. and Kardoš F.: *Facial parity edge colouring*
14/2009 Czap J., Jendroľ S. and Kardoš F.: *On the strong parity chromatic number*

2010

1/2010 Cechlárová K. and Pillárová E.: *A near equitable* 2*-person cake cutting algorithm*
2/2010 Cechlárová K. and Jelínková E.: *An efficient implementation of the equilibrium algorithm for housing markets with duplicate houses*
3/2010 Hutník O. and Hutníková M.: *An alternative description of Gabor spaces and Gabor-Toeplitz operators*
4/2010 Žežula I. and Klein D.: *Orthogonal decompositions in growth curve models*
5/2010 Czap J., Jendroľ S., Kardoš F. and Soták R.: *Facial parity edge colouring of plane pseudographs*
6/2010 Czap J., Jendroľ S. and Voigt M.: *Parity vertex colouring of plane graphs*
7/2010 Jakubíková-Studenovská D. and Petrejčíková M.: *Complementary quasiorder lattices of monounary algebras*
8/2010 Cechlárová K. and Fleiner T.: *Optimization of an SMD placement machine and flows in parametric networks*
9/2010 Skřivánková V. and Juhás M.: *Records in non-life insurance*
10/2010 Cechlárová K. and Schlotter I.: *Computing the deficiency of housing markets with duplicate houses*
11/2010 Skřivánková V. and Juhás M.: *Characterization of standard extreme value distributions using records*
12/2010 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2010*

2011

1/2011 Cechlárová K. and Repiský M.: *On the structure of the core of housing markets*
2/2011 Hudák D. and Šugerek P.: *Light edges in* 1-*planar graphs with prescribed minimum degree*
3/2011 Cechlárová K. and Jelínková E.: *Approximability of economic equilibrium for housing markets with duplicate houses*
4/2011 Cechlárová K., Doboš J. and Pillárová E.: *On the existence of equitable cake divisions*
5/2011 Karafová G.: *Generalized fractional total coloring of complete graphs*
6/2011 Karafová G and Soták R.: *Generalized fractional total coloring of complete graphs for sparse edge properties*
7/2011 Cechlárová K. and Pillárová E.: *On the computability of equitable divisions*
8/2011 Fabrici I., Horňák M., Jendroľ S. and Kardoš F., eds.: *Workshop Cycles and Colourings 2011*
9/2011 Horňák M.: *On neighbour-distinguishing index of planar graphs*

2012

1/2012 Fabrici I. and Soták R., eds.: *Workshop Mikro Graph Theory*
2/2012 Juhász M. and Skřivánková V.: *Characterization of general classes of distributions based on independent property of transformed record values*
3/2012 Hutník O. and Hutníková M.: *Toeplitz operators on poly-analytic spaces via time-scale analysis*
4/2012 Hutník O. and Molnárová J.: *On Flett's mean value theorem*
5/2012 Hutník O.: *A few remarks on weighted strong-type inequalities for the generalized weighted mean operator*

2013

1/2013 Cechlárová K., Fleiner T. and Potpinková E.: *Assigning experts to grant proposals and flows in networks*
2/2013 Cechlárová K., Fleiner T. and Potpinková E.: *Practical placement of trainee teachers to schools*
3/2013 Halčinová L., Hutník O. and Molnárová J.: *Probabilistic-valued decomposable set functions with respect to triangle functions*
4/2013 Cechlárová K., Eirinakis P., Fleiner T., Magos D., Mourtos I. and Potpinková E.: *Pareto optimality in many-to-many matching problems*
5/2013 Klein D. and Žežula I.: *On drawbacks of least squares Lehmann-Scheffé estimation of variance components*
6/2013 Roy A., Leiva R., Žežula I. and Klein D.: *Testing the equality of mean vectors for paired doubly multivariate observations in blocked compound symmetric covariance matrix setup*

Preprints can be found in: http://umv.science.upjs.sk/index.php/veda-a-vyskum/preprinty